Tentamensskrivning i Flervariabelanalys del 1, MMG300.
Tid: 2011-06-08, kl 8.30-12.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: tel 0703 08 83 04

MATEMATIK
Göteborgs Universitet

---

1. Visa att en delmängd M till $\mathbb{R}^n$ är kompakt om och endast om varje punktföljd i M har en konvergent delföljd med gränsvärde i M. (3p)

2. a) Definiera vad som menas med att en funktion f är differentierbar i en punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.
   b) Visa att om $f(x, y)$ är en $\mathcal{C}^1$-funktion så är den differentierbar. (4p)

3. a) Ange i vilken riktning funktionen $f(x, y, z) = z \sin x + y \ln z$ växer snabbast i punkten $(\pi, 1, 2)$. (2p)
   b) Avgör om funktionen $g(x, y) = y \ln x$ har gränsvärde då $(x, y) \to (0, 0)$. (2p)

4. Bestäm en ekvation för tangentplanet till den parametriserade ytan

$$r(s, t) = (st + st^2, t^2, s + t),\ 0 < s < 2,\ -2 < t < 0$$

i punkten $(0, 1, 0)$. (3p)

5. Motivera att funktionen

$$f(x, y) = \frac{4}{3}x^2 + y^2 - x - \frac{3}{4}y$$

antar största och minsta värde på den mängd som ges av att

$$\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1.$$

Bestäm också dessa värden samt i vilka punkter de antas. (4p)

6. Låt a och b vara givna positiva konstanter. Bestäm den lösning $f(x, y)$ till differentialekvationen

$$af'_x + bf'_y = 1,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

som uppfyller villkoret

$$f(t, 1 - t) = 1,\ t \in \mathbb{R}$$

genom att göra variabelbytet $u = bx - ay$, $v = x$. (4p)

Tentamensskrivning i Flervariabelanalys del 1, MMG300.
Tid: 2011-06-08, kl 8.30-12.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: tel 0703 08 83 04

MATEMATIK
Göteborgs Universitet

---

7. Finns det kontinuerliga funktioner f sådana att $f(D) = S$ i fallen nedan? Ge exempel eller motbevis.

   a) $D = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1, x \leq 0\}$, $S = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

   b) $D = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, $S = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1, x < 0\}$

   c) $D = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1, x < 0\}$, $S = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ (3p)

Lycka till!
Ulla Dinger