MMG300 Flervariabelanalys, del 1 2012-03-13

1c) $M = \{(x,y);\ \cos(x+y) > \sin(xy) > 0\}$

Sätt $f(x,y) = \cos(x+y) - \sin(xy)$ och $g(x,y) = \sin(xy)$

Då är f och g kontinuerliga på hela $\mathbb{R}^2$ ($f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$),

och $M = \{(x,y);\ f(x,y) > 0\} \cap \{(x,y);\ g(x,y) > 0\}$ öppen,

ty snitt av två öppna mängder (enl. Satsen i b)).

3) $f(1, \frac{\pi}{2}, \pi) = \sin\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cos\pi = 1 - \pi$. Den sökta nivåytan

är alltså $f(x,y,z) = 1 - \pi$. Vidare är grad f

$\nabla f(1, \frac{\pi}{2}, \pi) = (\sin y,\ x\cos y + 2\cos z,\ -2y\sin z)\Big|_{(1,\frac{\pi}{2},\pi)} =$

$= (1, -2, 0)$ en normal till tangentplanet, som

alltså har ekvationen $1(x-1) - 2(y - \frac{\pi}{2}) = 0$, dvs.

$$x - 2y - 1 + \pi = 0$$

4) $f(x,y) = \ln(x^2y^2) - x - y^2$. Vi har:

$f'_x = \frac{2xy^2}{x^2y^2} - 1 = \frac{2}{x} - 1$; $f'_x(2,-1) = 0$

$f'_y = \ldots = \frac{2}{y} - 2y$; $f'_y(2,-1) = 0$

$f''_{xx} = -2/x^2$; $f''_{xx}(2,-1) = -1/2$

$f''_{xy} = 0$

$f''_{yy} = -\frac{2}{y^2} - 2$; $f''_{yy}(2,-1) = -4$

Taylorutvecklingen av ordning 2 i punkten $(2,-1)$ är

$$f(2+h, -1+k) = f(2,-1) + f'_x(2,-1)h + f'_y(2,-1)k + \frac{1}{2}\Big[f''_{xx}(2,-1)h^2 + 2f''_{xy}(2,-1)hk + f''_{yy}(2,-1)k^2\Big] + (h^2+k^2)^{3/2} B(h,k)$$

där $B(h,k)$ är en begränsad funktion vid $(0,0)$.

$$\therefore\ f(2+h, -1+k) = \ln 4 - 3 + \frac{1}{2}\underbrace{\Big[-\frac{1}{2}h^2 - 4k^2\Big]}_{Q(h,k)} + (h^2+k^2)^{3/2} B(h,k)$$

Eftersom $(2,-1)$ är en stationär punkt och $Q(h,k)$ är negativt definit är $(2,-1)$ en str. lokalt maximipkt.

5) $3f'_x + 4f'_y = 2\sin(x-y)$ $\circledast$

Variabelbytet $\begin{cases} u = x + ay \\ v = x - y \end{cases}$ ger, med $f(x,y) = g(u,v)$,

$$f'_x = g'_u u'_x + g'_v v'_x = g'_u + g'_v$$
$$f'_y = g'_u u'_y + g'_v v'_y = a g'_u - g'_v \quad \text{och alltså har vi}$$

$\circledast \iff (3+4a)g'_u - g'_v = 2\sin v \iff \left[\text{Välj } a = -3/4\right]$

$g'_v = -2\sin v \iff g(u,v) = 2\cos v + \varphi(u) \iff$

$f(x,y) = 2\cos(x-y) + \varphi(x - \frac{3}{4}y)$, där φ godt. derbar funktion

Detta är allmän lösning till $\circledast$. Bivillkoret ger

$y^2 + 2\cos y = f(0,y) = 2\cos(-y) + \varphi(-\frac{3}{4}y) = 2\cos y + \varphi(-\frac{3}{4}y)$

$\therefore \varphi(-\frac{3}{4}y) = y^2 = (-\frac{3}{4}y)^2 \cdot \frac{16}{9}$, dvs. $\varphi(t) = \frac{16}{9}t^2$

$\therefore f(x,y) = 2\cos(x-y) + \frac{16}{9}(x - \frac{3}{4}y)^2 = 2\cos(x-y) + (\frac{4}{3}x - y)^2$. ∎

6) a) $f(x) = \sqrt{x}$ är likf. kont. på $[0,2]$, ty kont. f. på kompakt

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$ på $[1,\infty[$ $\therefore$ f likf. kont. på $[1,\infty[$

Tag $\varepsilon > 0$. Då finns $\delta_1 > 0$ och $\delta_2 > 0$ s.a.

(1) $|x-y| < \delta_1,\ x,y \in [0,2] \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

(2) $|x-y| < \delta_2,\ x,y \in [1,\infty[\implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Med $0 < \delta \leq \min(\delta_1, \delta_2, 1)$ får vi att

$|x-y| < \delta,\ x,y \in [0,\infty[\implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ VSB

$\delta \leq 1$ ger att $x,y \in [0,2]$ eller $x,y \in [1,\infty[$

b) $g(x,y) = \sqrt{x}$ är likf. kont. på $\{(x,y);\ x \geq 0\}$, ty

Tag $\varepsilon > 0$. Enl. a) finns $\delta > 0$ s.a.

$|g(x,y) - g(x_0,y_0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ om $|x - x_0| < \delta$ och $x \geq 0$

Men $|x - x_0| \leq |(x,y) - (x_0,y_0)|$. Alltså har vi

$x \geq 0,\ |(x,y) - (x_0,y_0)| < \delta \implies |g(x,y) - g(x_0,y_0)| < \varepsilon$ ∎

7) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{om } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{om } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \underbrace{\frac{\sin xy}{xy}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r}} \to 1 \cdot 0 = 0 \quad \text{då } (x,y)\to(0,0)$$

Välj $a = 0$ så blir f kont. i $(0,0)$.

Är f differentierbar i $(0,0)$?

Vi har $f(x,0) = f(0,y) = 0 \ \forall x,y$ så f har partiella derivator i $(0,0)$ och $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$

Vi använder def. av differentierbarhet:

$$\frac{\varepsilon(h,k)}{|(h,k)|} = \frac{f(h,k) - f(0,0) - f'_x(0,0)h - f'_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \frac{\sin hk}{h^2+k^2} = \underbrace{\frac{\sin hk}{hk}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{hk}{h^2+k^2}}_{=\cos\theta\sin\theta}$$ saknar gränsvärde då $(h,k)\to(0,0)$

$h = r\cos\theta$
$k = r\sin\theta$

Vi <u>kan alltså inte</u> välja a så att f blir differentierbar i origo.

∎