MATEMATIK
Göteborgs universitet
Tentamen 2012-03-13, 14:00 - 18:00

MMG300 Flervariabelanalys, del 1

Examinator: Ulla Dinger, Matematiska vetenskaper, tel 772 3559
Telefonvakt: tel 0703 08 83 04
Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa. Språklexikon är tillåtet.

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 18 poäng krävs för betyget VG.
Lösningsförslag läggs ut på kursens hemsida första arbetsdagen efter tentamenstillfället.
Resultat meddelas via epost från Ladok.

---

1. (a) Definiera begreppet *öppen mängd* i $\mathbb{R}^n$.

(b) Visa att mängden $\{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) \in M\}$ är öppen i $\mathbb{R}^n$ om M är öppen i $\mathbb{R}^m$ och $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}^n$.

(c) Visa med hjälp av ovanstående sats att mängden $\{(x,y); \cos(x+y) > \sin(xy) > 0\}$ är öppen. (5p)

2. Låt f och g vara av klass $\mathcal{C}^1$. Antag att (a,b) är en inre punkt i D_f och i D_g som löser problemet att maximera $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y) = 0$.
Visa att då är grad$f(a,b)$ och grad$g(a,b)$ parallella. (3p)

3. Låt $f(x,y,z) = x\sin y + 2y\cos z$. Bestäm den nivåyta till f som innehåller punkten $(1, \pi/2, \pi)$. Bestäm även en ekvation för nivåytans tangentplan i punkten $(1, \pi/2, \pi)$. (3p)

4. Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 i punkten $(2,-1)$ till funktionen $f(x,y) = \ln(x^2y^2) - x - y^2$. Avgör också om $(2,-1)$ är en lokal extrempunkt till f. (3p)

5. Lös differentialekvationen $3f'_x + 4f'_y = 2\sin(x-y)$, t.ex. genom att göra ett variabelbyte av formen $u = x + ay, v = x - y$ för lämplig konstant a.
Bestäm också den lösning som uppfyller $f(0,y) = y^2 + 2\cos y$. (4p)

6. (a) Visa att $f(x) = \sqrt{x}$ är likformigt kontinuerlig på $[0, \infty[$.

(b) Avgör om $g(x,y) = \sqrt{x}$ är likformigt kontinuerlig på $\{(x,y); x \geq 0\}$. (4p)

Motivera väl!

7. Kan man bestämma konstanten a så att funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{om } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{om } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

blir differentierbar i origo? Vad ska a i så fall vara? (3p)

Lycka till!
Ulla