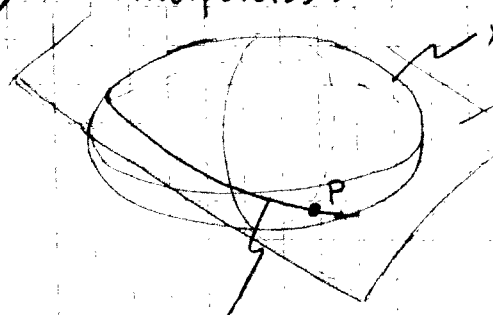


2c)  $f(x) = \frac{1}{x} \sin x \rightarrow 1$  då  $x \rightarrow 0$ . Med  $f(0) = 1$  är  $f$  kontinuerlig på  $[0, 2\pi]$ , som är kompakt. Enl. Sats är  $f$  då likt. kont. på  $[0, 2\pi]$ , och förstås även på  $]0, 2\pi]$ .

3) Principskiss:



$x^2 + 2y^2 + z^2 = 10$  ;  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2$   
 $x - y - 2z = 1$   
 $P = (1, 2, -1)$  tillhör både planet och ellipsoiden  
 Skärningskurvan  $\gamma$ .

Beräkna tangenten till  $\gamma$  i punkten  $P$ .

En normalvektor till planet är  $n_1 = (1, -1, -2)$

En normalvektor till ellipsoiden i punkten  $P$

är  $\text{grad} f(P) = (2x, 4y, 2z)|_P = (2, 8, -2) = 2(1, 4, -1)$

Välj  $n_2 = (1, 4, -1)$  som normalvektor till ellipsoiden

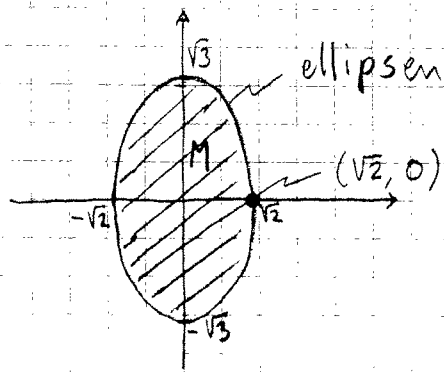
i  $P$ . En tangentvektor till  $\gamma$  i  $P$  är parallell med

$$n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (1+8, -(-1+2), 4+1) = (9, -1, 5)$$

$\therefore v = (9, -1, 5)$  är en riktningsvektor till tangenten, <sup>(den sökta)</sup>

som alltså har ekvationen:  $\begin{cases} x = 1 + 9t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

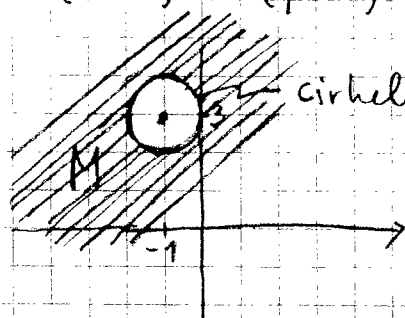
4a)



ellipsen  $3x^2 + 2y^2 = 6$   
 $M$  är ej öppen, ej slutet  
 ej kompakt,  
 $M$  är sammanhängande.

b)

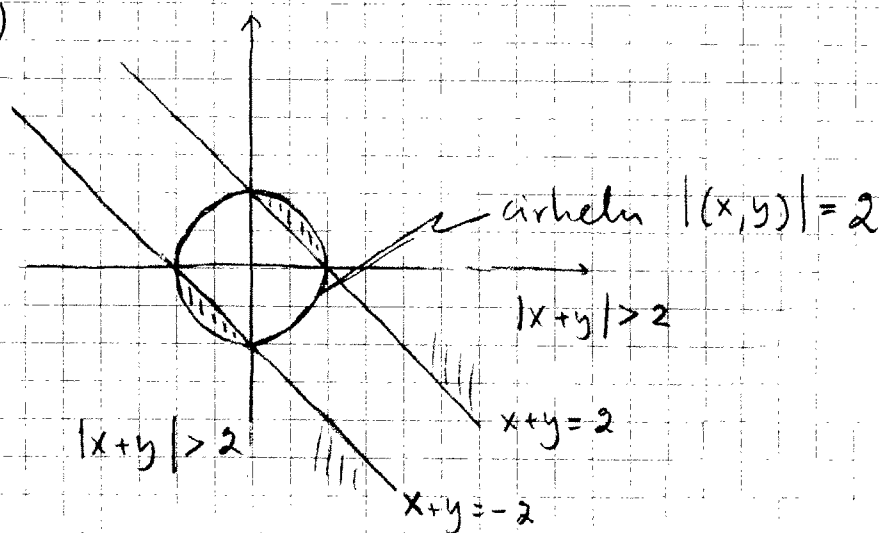
$$x^2 + y^2 \geq 6y - 2x - 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 > 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \underline{(x+1)^2 + (y-3)^2 \geq 1}$$



cirkeln  $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 1$

$M$  är ej öppen, ej kompakt  
 $M$  är slutet, sammanh.

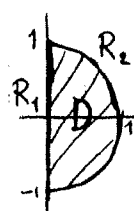
c)



$M$  är öppen  
 ej slutet  
 ej kompakt  
 ej sammanh.

5)

$f(x,y) = x^2(y-1) - 5y^3/3$  är kont. på hela  $\mathbb{R}^2$ , spec. på  $D = \{(x,y); x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Eftersom  $D$  är kompakt antar  $f$  största o. minsta värde på  $D$ .



Vi söker stationära punkter till  $f$  i det inre till  $D$ .

$$f'_x = 2x(y-1) = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee y=1$$

$\therefore f'_x \neq 0$  för alla p.ktr. i  $\text{Int}(D)$ .

$\therefore f$  saknar stationära punkter i  $\text{Int}(D)$ .

Alltså antas max/min på randen  $R_1 \cup R_2$  (se fig.).

forts. 5)

På  $R_1$ :  $f(x, y) = f(0, y) = -5y^3/3$  avtagande, och  
 $f(0, -1) = 5/3$ ,  $f(0, 1) = -5/3$ .

På  $R_2$ :  $f(x, y) = [x^2 = 1 - y^2] = (1 - y^2)(y - 1) - 5y^3/3 =$   
 $= -\frac{8y^3}{3} + y^2 + y - 1 \equiv g(y)$ ;  $-1 \leq y \leq 1$

$$g'(y) = -8y^2 + 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1/2 \vee y = -1/4$$

Ger de återstående kandidaterna till max/min-värde:

$$g(1/2) = -7/12, \quad g(-1/4) = -55/48$$

Jämförelse mellan de inringade värdena ger att

$$\max f = f(0, -1) = 5/3 \text{ och } \min f = f(0, 1) = -5/3 \quad \square$$

6) lös  $2f'_x + f'_y = 0$ . Variabelbyte  $\begin{cases} u = ax + by \\ v = x \end{cases}$  ger

$$\left. \begin{aligned} f'_x &= f'_u u'_x + f'_v v'_x = a f'_u + f'_v \\ f'_y &= f'_u u'_y + f'_v v'_y = b f'_u \end{aligned} \right\} \text{ och}$$

$$2f'_x + f'_y = 2a f'_u + 2f'_v + b f'_u = (2a + b) f'_u + 2f'_v =$$

$= [Välj \underset{*0}{a} \text{ och } \underset{*0}{b} \text{ s.a. } 2a + b = 0, \text{ t.ex. } \underline{a=1 \text{ och } b=-2}]$

$$= 2f'_v = 0 \Leftrightarrow f = \varphi(u) = \varphi(x - 2y)$$

$\therefore$  Allm. lösn. ges av  $f(x, y) = \varphi(x - 2y)$  där  $\varphi$  är godt,  
den bara funktion.

$$f(x, 0) = x^2 \Leftrightarrow x^2 = \varphi(x) \quad \therefore \underline{\underline{f(x, y) = (x - 2y)^2}}$$

$$7) f(x, y) = (4x^2 + axy + y^2)(x + a)$$

$$a) f'_x = (8x + ay)(x + a) + (4x^2 + axy + y^2) = 12x^2 + (8a + 2ay)x$$
$$= 12x^2 + 2a(4 + y)x + a^2y + y^2; \quad f'_x(0, 0) = 0 \quad \forall a$$

$$f'_y = (ax + 2y)(x + a); \quad f'_y(0, 0) = 0 \quad \forall a$$

$\therefore$  För varje värde på  $a$  har funktionen en stationär pkt. i  $(0, 0)$ .

$$7b) \begin{aligned} f''_{xx} &= 24x + 2a(4+y) & ; & \quad f''_{xx}(0,0) = 8a \\ f''_{xy} &= 2ax + a^2 + 2y & ; & \quad f''_{xy}(0,0) = a^2 \\ f''_{yy} &= 2(x+a) & ; & \quad f''_{yy}(0,0) = 2a \end{aligned}$$

Den kvadratischa formen  $Q(h,k) = 8ah^2 + 2a^2hk + 2ak^2$  är identiskt noll då  $a=0$ , och "ger alltså inget".

Men, för  $a=0$  har vi

$$f(x,y) = (4x^2 + y^2)x \quad \begin{cases} < 0 & \text{f} \bar{n} \ x < 0 \\ = 0 & \text{f} \bar{n} \ x = 0 \\ > 0 & \text{f} \bar{n} \ x > 0 \end{cases} \quad \text{vilket ger att}$$

$f$  inte har lokalt extremvärde i  $(0,0)$  för  $a=0$ .

c) För  $a \neq 0$  har vi

$$\begin{aligned} Q(h,k) &= 8ah^2 + 2a^2hk + 2ak^2 = 2a(k^2 + akh + 4h^2) = \\ &= \underbrace{2a}_{\neq 0} \left[ \left(k + \frac{ah}{2}\right)^2 + (16 - a^2)h^2/4 \right]. \quad \text{Vi ser att:} \end{aligned}$$

Om  $a^2 < 16$ :  $Q(h,k)$  är pos. el. neg. definit, vilket ger att  $(0,0)$  ger lokalt extremvärde.

Om  $a^2 > 16$ :  $Q(h,k)$  är då indefinit, vilket ger att  $(0,0)$  är en sadelpunkt.

Om  $a^2 = 16$ : , dvs.  $a=4$  v  $a=-4$ , är  $Q(h,k)$  pos./neg. semidefinit och ger därför ingen information.

Vi måste undersöka fallen  $a=4, a=-4$  separat:

$$\underline{a=4}: f(x,y) = (4x^2 + 4xy + y^2)(x+4) = (2x+y)^2(x+4) \geq 0$$

i omgivning till  $(0,0)$  och  $f(0,0) = 0$

$\therefore f$  har lokalt min i  $(0,0)$  då  $a=4$ .

$$\underline{a=-4}: f(x,y) = (4x^2 - 4xy + y^2)(x-4) = (2x-y)^2(x-4) \leq 0$$

i omgivning till  $(0,0)$  och  $f(0,0) = 0$

$\therefore f$  har lokalt max i  $(0,0)$  då  $a=-4$ .

$\therefore f$  har lokalt extremvärde i  $(0,0)$  för

$$-4 \leq a < 0 \quad \text{och} \quad \text{f} \bar{n} \quad 0 < a \leq 4$$

