MMG300 Flervariabelanalys, del 1, 2012-08-30

3) $f(x,y) = 2 + x\sin y + y\ln x$

a) $f(1,\pi) = 2 + \sin\pi + \pi\ln 1 = 2$. Den sökta nivåkurvan är $f(x,y) = 2$, dvs kurvan $x\sin y + y\ln x = 0$.

b) $\nabla f(1,\pi) = \left(\sin y + \frac{y}{x}, \ x\cos y + \ln x\right)\Big|_{(1,\pi)} = (\pi, -1)$ är den riktning i vilken $f$ växer snabbast.

c) Tangentplanet till grafen av $f$ i punkten $(1,\pi,2)$ har ekvationen:

$$z = f(1,\pi) + f'_x(1,\pi)(x-1) + f'_y(1,\pi)(y-\pi) =$$
$$= 2 + \pi(x-1) - 1(y-\pi) = \pi x - y + 2, \quad \text{dvs.}$$
$$\underline{\pi x - y - z + 2 = 0}$$

4a) $M = \{(x,y,z);\ \cos(xyz) \leq \sin(x+y+z)\} = \{(x,y,z);\ f(x,y,z) \geq 0\}$

där $f(x,y,z) = \sin(x+y+z) - \cos(xyz)$.

Eftersom $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$ och $M = f^{-1}([0,\infty[)$, där $[0,\infty[$ är sluten, ger Sats att $M$ är sluten.

b) $M = \{(\sin(x+y), \ln(1+y^2), x^3y) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \leq 2\} = f(K)$

där $f(x,y) = (\sin(x+y), \ln(1+y^2), x^3y)$ och

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 2\}.$$

Eftersom $K$ är kompakt och $f: K \to \mathbb{R}^3$ är kontinuerlig så ger Sats att $f(K)$ är kompakt.

5) $$\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+3xy+y^2} = \underbrace{\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}_{\substack{\to 1 \\ \text{då } (x,y)\to(0,0)}} \cdot \underbrace{\frac{x^2+y^2}{x^2+3xy+y^2}}_{\text{undersöks närmare!}}$$

$$\frac{x^2+y^2}{x^2+3xy+y^2} = \begin{bmatrix}\text{polär} \\ \text{subst}\end{bmatrix} = \frac{r^2}{r^2+3r^2\cos\theta\sin\theta} = \frac{1}{1+3\cos\theta\sin\theta}$$ saknar gränsv. då $(x,y)\to(0,0)$

$\therefore$ $f(x,y)$ saknar gränsvärde i $(0,0)$

Det är omöjligt att välja $a$ s.a. $f$ blir kontinuerlig.

6) Kurvan $g(x,y) \equiv 2x^3+y^3=1$ utgör en <u>sluten</u> mängd, som dock är obegränsad, ty för punkter på kurvan gäller $y=\sqrt[3]{1-2x^3} \to +\infty$ då $x\to-\infty$.

Det finns alltså inga punkter med maximalt avstånd till origo. Däremot finns punkt(er) med minimalt avstånd till origo, vilket inses genom att titta på kurvan inuti en (stor) sluten boll.

Vi söker minimipunkter till funktionen

$$f(x,y)=x^2+y^2,$$

under bivillkoret $g(x,y)\equiv 2x^3+y^3=1$.

För en sidan gäller att $\nabla f \parallel \nabla g$ i punkten.

Vi har $\nabla f=(2x,2y)$, $\nabla g=(6x^2,3y^2)$ och

$$\nabla f \parallel \nabla g \Leftrightarrow 0=\begin{vmatrix}2x & 6x^2 \\ 2y & 3y^2\end{vmatrix} = 6xy^2-12x^2y = 6xy(y-2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \lor y=0 \lor y=2x$$

$\underline{x=0}$ : $g(0,y)=y^3=1 \Leftrightarrow y=1$ $\therefore$ $(0,1)$ <u>ev.</u> min

$\underline{y=0}$ : $g(x,0)=2x^3=1 \Leftrightarrow x=1/\sqrt[3]{2}$ $\therefore$ $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},0)$ <u>ev.</u> min

$\underline{y=2x}$ : $g(x,2x)=2x^3+8x^3=10x^3=1 \Leftrightarrow x=1/\sqrt[3]{10}$ $\therefore$ $(\frac{1}{\sqrt[3]{10}},\frac{2}{\sqrt[3]{10}})$

Vi har tre "kandidater" till minimipunkter och forts. 6) jämför funktionsvärdena i dessa:

$$f(0,1) = 1$$

$$f\left(\tfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0\right) = \frac{1}{2^{2/3}} < 1 = f(0,1)$$

$$f\left(\tfrac{1}{\sqrt[3]{10}}, \tfrac{2}{\sqrt[3]{10}}\right) = \frac{1}{10^{2/3}} + \frac{4}{10^{2/3}} = \frac{5}{10^{2/3}} = \frac{5}{2^{2/3} \cdot 5^{2/3}} =$$

$$= \frac{1}{2^{2/3}} \cdot 5^{1/3} > \frac{1}{2^{2/3}} = f\left(\tfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0\right)$$

$\therefore$ Minimum fås i punkten $\underline{\left(\tfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0\right)}$.

7) Med $h(x,t) = \left(e^{2(x-t)} - e^{-2(x-t)}\right) g(t)/4$ har vi

$$h'_x(x,t) = \left(2e^{2(x-t)} + 2e^{-2(x-t)}\right) g(t)/4 \quad \text{och}$$

$$h''_{xx}(x,t) = \left(4e^{2(x-t)} - 4e^{-2(x-t)}\right) g(t)/4 = 4h(x,t).$$

Eftersom $h$, $h'_x$ och $h''_{xx}$ är kontinuerliga i $\mathbb{R}^2$ kan vi derivera $f$ "under integral-tecknet" enl:

$$f'(x) = \int_0^x h'_x(x,t)\,dt + \underbrace{h(x,x)}_{=0} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}x}_{=1}$$

$$f''(x) = \int_0^x \underbrace{h''_{xx}(x,t)}_{=4h(x,t)}\,dt + \underbrace{h'_x(x,x)}_{=g(x)} \cdot 1 =$$

$$= 4\int_0^x h(x,t)\,dt + g(x) = 4f(x) + g(x)$$

$\therefore \; f''(x) - 4f(x) = g(x)$ VSB.