MATEMATIK
Göteborgs universitet
Tentamen 2012-08-30, 8:30 - 12:30

MMG300 Flervariabelanalys, del 1

Examinator: Ulla Dinger, Matematiska vetenskaper, tel 772 3559
Telefonvakt: tel 0703 08 83 04
Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa. Språklexikon är tillåtet.

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 18 poäng krävs för betyget VG.
Lösningsförslag läggs ut på kursens hemsida första arbetsdagen efter tentamenstillfället.
Resultat meddelas via epost från Ladok.

---

1. Låt f vara en reellvärd funktion på $\mathbb{R}^n$ med definitionsmängden D.

(a) Definiera vad som menas med att en punkt $a \in D$ är en *lokal maximipunkt* till f.

(b) Antag att a är en inre punkt i D och att f är partiellt deriverbar i a. Visa att om a är en lokal maximipunkt till f så är a en stationär punkt till f. (4p)

2. Låt M vara en delmängd till $\mathbb{R}^n$.

(a) Definiera vad som menas med att en punkt a i $\mathbb{R}^n$ är en *randpunkt* till M.

(b) Definiera vad som menas med att M är en *sluten mängd* i $\mathbb{R}^n$.

(c) Visa att M är sluten om och endast om varje konvergent följd i M har sitt gränsvärde i M. (5p)

3. Låt $f(x, y) = 2 + x \sin y + y \ln x$.

(a) Ange den nivåkurva till f som går genom punkten $(1, \pi)$.

(b) Ange i vilken riktning som f växer snabbast i punkten $(1, \pi)$.

(c) Bestäm en ekvation (på normalform) för tangentplanet till grafen av f i den punkt där $x = 1$ och $y = \pi$. (4p)

4. Bevisa, med hjälp av lämpliga satser, följande påståenden.

(a) Mängden $\{(x, y, z); \cos(xyz) \leq \sin(x + y + z)\}$ är sluten i $\mathbb{R}^3$. (1,5p)

(b) Mängden $\{(\sin(x + y), \ln(1 + y^2), x^3y) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq 2\}$ är kompakt. (1,5p)

OBS Det ska tydligt framgå vad som är förutsättningar resp slutsatser i satserna du använder, men du behöver (förstås) inte bevisa satserna.

5. Avgör om det går att bestämma konstanten a så att funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+3xy+y^2} & \text{om } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & \text{om } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

blir kontinuerlig i $(0, 0)$. Hur ska a i så fall väljas? (3p)

Vänd!

6. Bestäm i vilka punkter på kurvan $2x^3 + y^3 = 1$ som avståndet till origo är minimalt respektive maximalt. (3p)

7. Låt g vara en given kontinuerlig funktion och visa att

$$f(x) = \frac{1}{4}\int_0^x (e^{2(x-t)} - e^{-2(x-t)})\, g(t)\, dt$$

är en lösning till differentialekvationen $y'' - 4y = g(x)$. (3p)

Lycka till!

Ulla