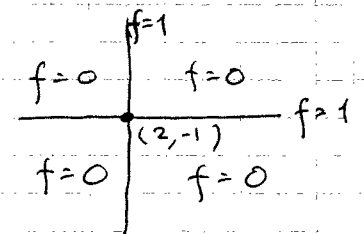


1c) Sätt $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{om } x=2 \text{ eller } y=-1 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$



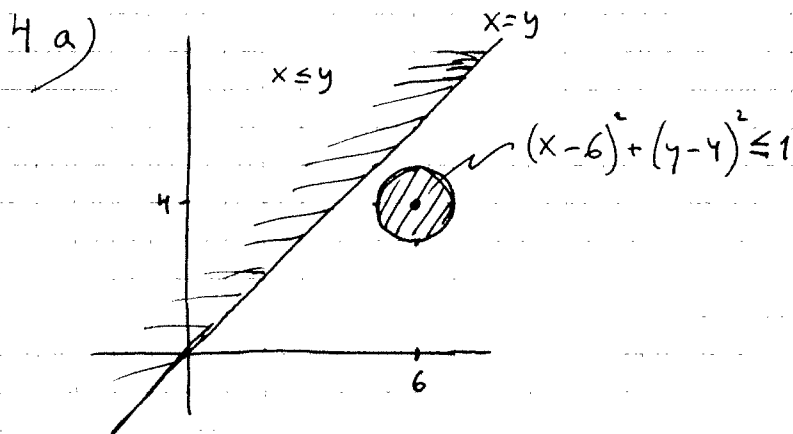
Då är f ej diff.bar i $(2,-1)$, ty ej kont.

Men f är partiellt deriverbar i $(2,-1)$; $f'_x(2,-1) = f'_y(2,-1) = 0$

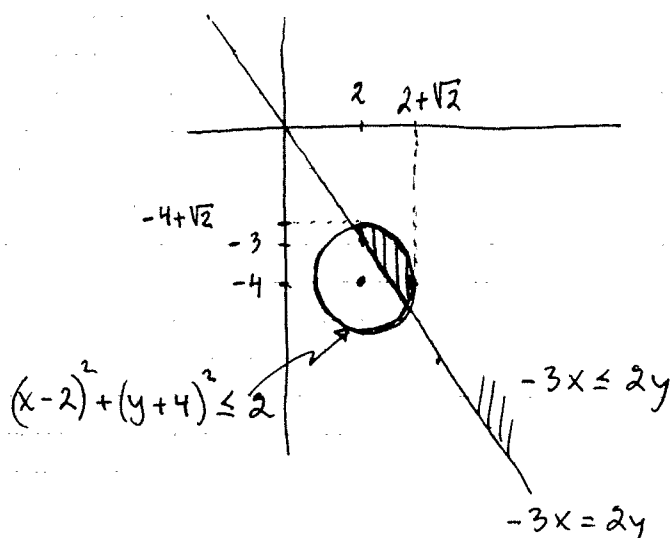
3a) f växer snabbast i gradientens riktning, dvs. i riktningen $\nabla f(-1, e, 3) = \left(\frac{2xy}{x^2y}, \frac{x^2}{x^2y}, -1 \right) \Big|_{(-1, e, 3)} = \underline{\underline{(-2, \frac{1}{e}, -1)}}$

b) Gradienten är vinkelrät mot nivåytan i punkten varför tangentplanets ekvation är

$$-2(x+1) + \frac{1}{e}(y-e) - (z-3) = 0, \text{ dvs. } \underline{\underline{2x - \frac{y}{e} + z = 0}}$$



$M = \emptyset$
Alltså både
öppen o. slutan



t.ex. $(2+\sqrt{2}, -4) \in N \therefore N \neq \emptyset$

N är slutan,
ej öppen

$$4b) S = \{(x, y, z); 5x^2 + 4y^2 < z < 1 - 4x^2 - 5y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\text{Obs. att } (x, y, z) \in S \Rightarrow 5x^2 + 4y^2 < 1 - 4x^2 - 5y^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 9x^2 + 9y^2 < 1 \Rightarrow x^2 + y^2 < \frac{1}{9}$$

$$\therefore S = \{(x, y, z); 5x^2 + 4y^2 < z < 1 - 4x^2 - 5y^2\} = \\ = \{(x, y, z); 5x^2 + 4y^2 - z < 0\} \cap \{(x, y, z); z + 4x^2 + 5y^2 < 1\} \\ = f^{-1}(-\infty, 0] \cap g^{-1}(-\infty, 1] \quad , \quad \text{där}$$

$$f(x, y, z) = 5x^2 + 4y^2 - z \quad \text{och} \quad g(x, y, z) = z + 4x^2 + 5y^2$$

Eftersom både f och g är kont. på hela $\mathbb{R}^3$ är mängderna $\underbrace{f^{-1}(-\infty, 0]}_{\text{öppen}}$ och $\underbrace{g^{-1}(-\infty, 1]}_{\text{öppen}}$ öppna

enl Sats; och därmed även S , ty snitt av två öppna mängder är öppen.

$$5) f(x, y) = \frac{x-y}{xy-1}, \quad xy \neq 1. \quad \text{Stationära pnter. söks:}$$

$$\begin{cases} f'_x = \frac{xy-1-y(x-y)}{(xy-1)^2} = \frac{y^2-1}{(xy-1)^2} = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1 \\ f'_y = \frac{-(xy-1)-x(x-y)}{(xy-1)^2} = \frac{1-x^2}{(xy-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

De stationära punkterna är $(1, -1)$ & $(-1, 1)$ (Obs. att $xy \neq 1$)

För att avgöra karaktär beräknar vi andraderivatorna:

$$f''_{xx} = (y^2-1)(-2)(xy-1)^3 y = 0 \quad \text{i stat. pnt}$$

$$f''_{yy} = (1-x^2)(-2)(xy-1)^3 x = 0 \quad \text{i stat. pnt}$$

$$f''_{xy} = \frac{2y(xy-1)^2 - 2(xy-1)x(y^2-1)}{(xy-1)^3} = \frac{2y(xy-1) - 2x(y^2-1)}{(xy-1)^3}$$

$$\therefore f''_{xy}(1, -1) = \frac{-2(-2)}{(-2)^3} = -\frac{1}{2} \quad ; \quad f''_{xy}(-1, 1) = \frac{2(-2)}{(-2)^3} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ För $(1, -1)$ är den kvadratiska formen $Q(h, k) = -hk$ och

för $(-1, 1)$ är den kvadratiska formen $Q(h, k) = hk$.

I båda fallen alltså indefinit, dvs. $(1, -1)$ & $(-1, 1)$ är

sadelpunkter. $\square$

6) Med $\begin{cases} u = x/y \\ v = y \end{cases}$ har vi:

$$f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = \frac{1}{y} f'_u$$

$$f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = -\frac{x}{y^2} f'_u + f'_v \quad \text{och}$$

$$x f'_x + y f'_y = x + y \Leftrightarrow \frac{x}{y} f'_u + \left(-\frac{x}{y} f'_u\right) + y f'_v = x + y$$

$\Leftrightarrow v f'_v = uv + v$ detta är ekvationen i de nya variablerna!

$$\begin{cases} y = v \\ x = uv \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} v = y > 0 \end{cases}$$

$$f'_v = u + 1 \Leftrightarrow f = uv + v + \varphi(u)$$

$$\Leftrightarrow \underline{f(x, y) = x + y + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)} \quad \text{Allmän lösning, } \varphi \text{ godt. } C^1\text{-fktn.}$$

Villkoret $f(x, 1) = x^2 + x + 1$ ger

$$x + 1 + \varphi(x) = x^2 + x + 1, \text{ dvs. } \varphi(x) = x^2$$

Den sökta lösningen är alltså $\underline{f(x, y) = x + y + \frac{x^2}{y^2}}$

7) $f(x, y) = xy \ln(x+y)$, $D = \{(x, y); x+y > 1\}$

Tag t.ex. de båda följderna (n, n) och $(n+\frac{1}{n}, n)$ i D .

Då gäller att

$$\begin{aligned} |f(n+\frac{1}{n}, n) - f(n, n)| &= |(n^2+1) \ln(2n+\frac{1}{n}) - n^2 \ln(2n)| = \\ &= (n^2+1) \ln(2n+\frac{1}{n}) - n^2 \ln(2n) \geq \\ &\geq (n^2+1) \ln(2n) - n^2 \ln(2n) = \ln(2n) \geq \\ &\geq \ln 2 > 0 \quad \forall n \end{aligned}$$

trots att $|f(n+\frac{1}{n}, n) - f(n, n)| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

Detta visar att f inte är likformigt kontinuerlig.

