MATEMATIK
Göteborgs universitet
Tentamen 2013-03-19, 14:00 - 18:00

MMG300 Flervariabelanalys, del 1

Examinator: Ulla Dinger, Matematiska vetenskaper, tel 772 3559
Telefonvakt: tel 0703 08 83 04
Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa. Språklexikon är tillåtet.

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 18 poäng krävs för betyget VG.
Lösningsförslag läggs ut på kursens hemsida första arbetsdagen efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Definiera vad som menas med att en funktion f är differentierbar i en punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

(b) Visa att en funktion som är differentierbar i en punkt $\mathbf{a}$ också är partiellt deriverbar i punkten.

(c) Ge exempel på en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som är partiellt deriverbar men inte differentierbar i $(2, -1)$. (4p)

2. Visa att en delmängd M till $\mathbb{R}^n$ är kompakt om och endast om varje punktföljd i M har en konvergent delföljd med gränsvärde i M. (3p)

3. (a) Ange i vilken riktning funktionen $f(x, y, z) = \ln(x^2 y) - z$ växer snabbast i punkten $(-1, e, 3)$.

(b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan $f(x, y, z) = f(-1, e, 3)$ i punkten $(-1, e, 3)$. (3p)

4. (a) Skissa mängderna

$$M = \{(x, y);\ (x-6)^2 + (y-4)^2 \le 1 \ \text{ och } \ x \le y\}$$

och

$$N = \{(x, y);\ (x-2)^2 + (y+4)^2 \le 2 \ \text{ och } \ -3x \le 2y\}$$

och avgör för var och en av dem om den är öppen och/eller sluten. Du får motivera med hjälp av bilderna, men det måste mycket tydligt framgå (i viss mån motiveras) hur mängderna ser ut. (2p)

(b) Visa att mängden

$$S = \{(x, y, z);\ 5x^2 + 4y^2 < z < 1 - 4x^2 - 5y^2 \ \text{ och } \ x^2 + y^2 \le 1\}$$

är öppen. Motivera ordentligt - och tänk på att du kan använda satser! (2p)

5. Bestäm alla stationära punkter till funktionen

$$f(x, y) = \frac{x - y}{xy - 1}, \quad xy \ne 1$$

och bestäm deras karaktär (lokal maximi- eller minimipunkt, sadelpunkt, ingetdera). (4p)

Vänd!

6. Transformera differentialekvationen $xf'_x + yf'_y = x + y$ till de nya variablerna u och v, där $u = x/y$ och $v = y$.

Bestäm sedan en funktion $f(x, y)$ som satisfierar den ursprungliga differentialekvationen för alla (x, y) med $y > 0$ samt uppfyller villkoret $f(x, 1) = x^2 + x + 1$. (4p)

7. Avgör om funktionen

$$f(x, y) = xy \ln(x + y)$$

är likformigt kontinuerlig på mängden $\{(x, y);\ \ x + y > 1\}$. (3p)

Lycka till!

Ulla