MMG300 Flervariabelanalys del 1, 2013-06-10

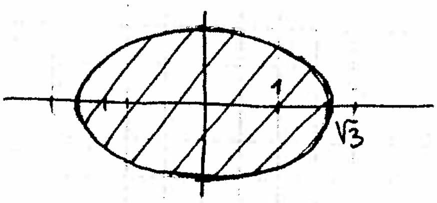
3) Sätt $f(x,y,z) = y - z\sin 2x$ och $g(x,y,z) = z - y^2 + \ln(x+1)$.
Ytorna är nivåytorna $f(x,y,z) = 2$ och $g(x,y,z) = -3$
Kontrollera att $P = (0,2,1)$ tillhör båda ytorna!
Normalvektorer till ytorna i pktn. P ges av gradienterna $\nabla f(P) = (-2z\cos 2x,\ 1,\ -\sin 2x)\big|_P = (-2,1,0)$
resp. $\nabla g(P) = \left(\frac{1}{x+1},\ -2y,\ 1\right)\big|_P = (1,-4,1)$.
En tangentvektor till kurvan är vinkelrät mot båda ytornas normalvektor, dvs parallell med

$$\nabla f(P) \times \nabla g(P) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (1, +2, 7).$$

Kurvans tangent har alltså ekv.

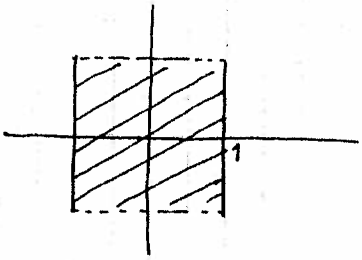
$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + 7t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4) a)



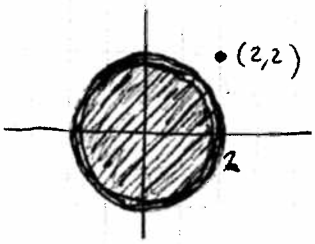
ej öppen, sluten
kompakt

b)



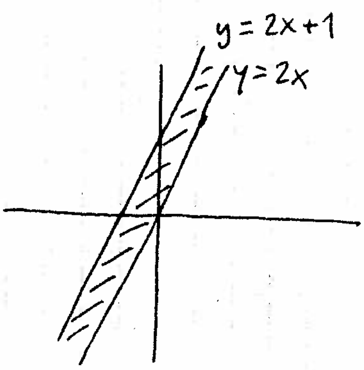
ej öppen, ej sluten
ej kompakt

c)



ej öppen, sluten
kompakt

d)



öppen, ej sluten
ej kompakt

5) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \to 1$ då $(x,y) \to (0,0)$. Sätt $f(0,0) = 1$, så är f kontinuerlig i hela $\mathbb{R}^2$. Vi har även att $f(x,y) \to 0$ då $|(x,y)| \to \infty$, ty $|\sin(x^2+y^2)| \le 1$. Enl. Sats (Korr. 1.35 i GLO) är då f likformigt kontinuerlig i $\mathbb{R}^2$ och speciellt i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. $\blacksquare$

6) Eftersom f är kontinuerlig och $\{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ är kompakt (slutna enhetsklotet) så finns största och minsta värde. De antas i stationära pktr. i det inre, eller på randen. Stationära punkter undersöks: För stationära pktr. gäller $\nabla f = (yz, xz, xy) = (0,0,0)$, vilket ger $f(x,y,z) = 0$ i stationära pktr.

Vi söker nu max. o. min av f på randen, dvs. under bivillkoret $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$.

Enl. Sats gäller att $\nabla f \parallel \nabla g$ i de sökta punkterna. Vi får systemet (där vi satt $\nabla f = \lambda \nabla g$)

$$\begin{cases} yz = \lambda 2x \\ xz = \lambda 2y \\ xy = \lambda 2z \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow xyz = 2\lambda x^2 = 2\lambda y^2 = 2\lambda z^2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{eller} \\ x^2 = y^2 = z^2 \end{cases}$$

Om $\lambda = 0$ så $xyz = 0$, dvs $f(x,y,z) = 0$

Om $x^2=y^2=z^2$ så $x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{3}$, och

$(x,y,z) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (alla kombinationer!)

Största värdet av f är $1/3\sqrt{3}$ och minsta värdet är $-1/3\sqrt{3}$

$\blacksquare$

7) Vi har

$$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{2h^4/h^2}{h} = 2h \to 0 \text{ då } h \to 0 \quad \text{och}$$

$$\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \frac{(h^4-3h^3)/h^2}{h} = h-3 \to -3 \text{ då } h \to 0$$

Alltså är f partiellt deriverbar i origo med

$f'_x(0,0) = 0$ och $f'_y(0,0) = -3$.

För att avgöra differentierbarhet tittar vi på kvoten

$$\frac{f(h,k)-f(0,0)-f'_x(0,0)h-f'_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\frac{2h^4+k^4-3k^3}{h^2+k^2}+3k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \frac{2h^4+k^4-3k^3+3h^2k+3k^3}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \frac{2h^4+k^4+3h^2k}{(h^2+k^2)^{3/2}} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} h=r\cos\theta \\ k=r\sin\theta \end{array}\right] = \frac{2r^4\cos^4\theta + r^4\sin^4\theta + 3r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^3} =$$

$$= \underbrace{2r\cos^4\theta + r\sin^4\theta}_{\to 0 \text{ då } r\to 0} + \underbrace{3\cos^2\theta\sin\theta}_{\text{saknar gränsvärde}}$$

∴ Gränsvärde saknas då $(h,k)\to(0,0)$.

Alltså är f <u>inte</u> differentierbar i $(0,0)$.