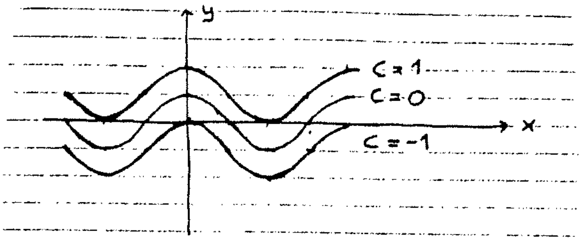
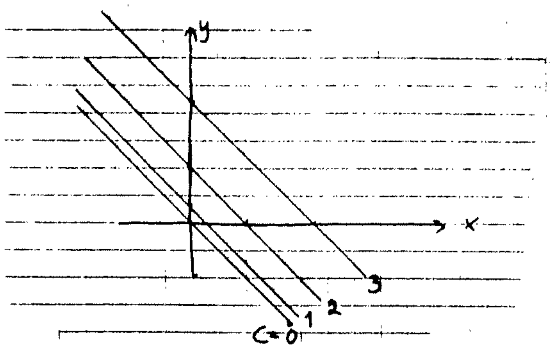
1c) Eftersom $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ kan vi definiera $f(0)=0$. Då är f kontinuerlig på $[0,1]$ som är kompakt, varför f även är likformigt kont. på $[0,1]$ och speciellt på $]0,1]$.

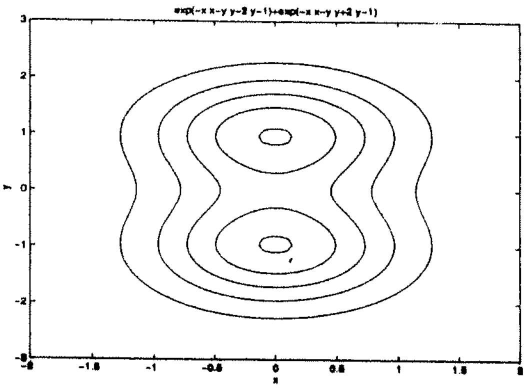
3a) $f(x,y) = y - \cos x = C$ $\iff y = C + \cos x$

$g(x,y) = \sqrt{x+y} = C \iff$ $x+y = C^2,\ x+y \geq 0,\ C \geq 0$





3b)



4) $\circledast \quad \frac{1}{x} f'_x - \frac{1}{y} f'_y = 4x^2y^2 \qquad (x>0,\ y>0)$

Inför variablerna $\begin{cases} u = x^2+y^2 \\ v = x^2-y^2 \end{cases}$. Kedjeregeln ger

$$f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = 2x f'_u + 2x f'_v$$

$$f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = 2y f'_u - 2y f'_v \text{, varav}$$

$$\circledast \iff 2f'_u + 2f'_v - 2f'_u + 2f'_v = \underline{4f'_v} = 4x^2y^2 \iff \left[\begin{array}{l} x^2 = (u+v)/2 \\ y^2 = (u-v)/2 \end{array}\right.$$

$$\iff 4f'_v = (u+v)(u-v) = u^2 - v^2 \iff \underline{f'_v = \frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{4}}$$

forts. 4) $\iff f = \frac{u^2}{4}v - \frac{v^3}{12} + g(u)$, g godt. der.bar fkn

$\therefore\ f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^2(x^2-y^2)}{4} - \frac{(x^2-y^2)^3}{12} + g(x^2+y^2)$ ☒

5) $f(x,y) = 3x^2y + 2y^2x - x$

$$\begin{cases} f'_x = 6xy + 2y^2 - 1 = 0 \\ f'_y = 3x^2 + 4yx = x(3x+4y) = 0 \iff x = 0 \vee 3x = -4y \end{cases}$$

$x=0$: $f'_x = 0 \iff 2y^2 = 1 \iff y = \pm 1/\sqrt{2}$

$3x = -4y$: $f'_x = -8y^2 + 2y^2 - 1 = 0 \iff -6y^2 = 1$ omöjligt!

$\therefore$ Två stationära punkter: $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ och $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

$f''_{xx} = 6y$, $f''_{yy} = 4x$, $f''_{xy} = 6x + 4y$

$Q(h,k) = f''_{xx}h^2 + 2f''_{xy}hk + f''_{yy}k^2$

$(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$: $Q(h,k) = \frac{6}{\sqrt{2}}h^2 + \frac{8}{\sqrt{2}}hk = \sqrt{2}(3h^2 + 4hk) =$

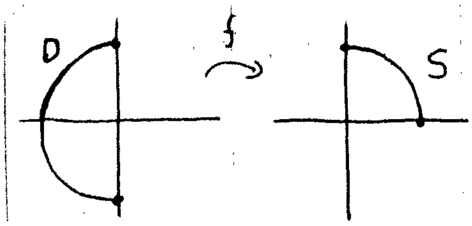
$= \sqrt{2}\left[(\sqrt{3}h + \frac{2k}{\sqrt{3}})^2 - \frac{4}{3}k^2\right]$ indefinit!

$(Q(1,0) > 0;\ Q(1,-1) < 0)$

$(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$: $Q(h,k) = -\frac{6}{\sqrt{2}}h^2 - \frac{8}{\sqrt{2}}hk$ indefinit (jfr. ovan).

Alltså är både $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ och $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ sadelpunkter, det saknas därmed lokala max. och min. ☒

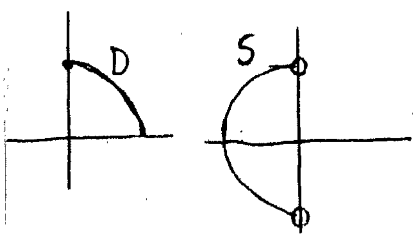
6a)



t.ex. $f(x,y) = (|x|, |y|)$ $(= (-x, |y|))$ är kont. och $f(D) = S$

$\therefore$ "Ja".

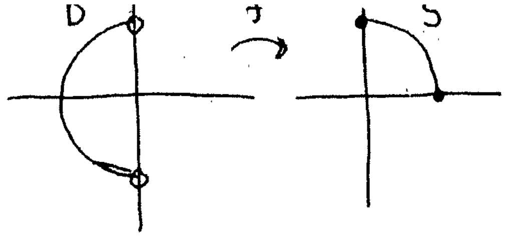
b)



D kompakt, S ej kompakt

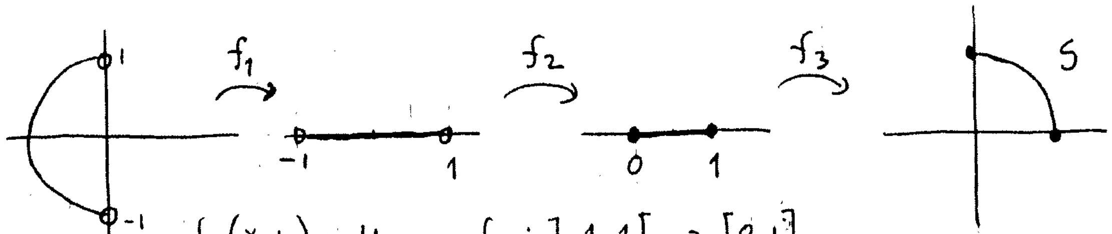
$\therefore$ Nej, det finns ej sådan f.

6c)



Vi ska konstruera kont. f s.a. $f(D) = S$.

Vi gör det "stegvis":



$f_1(x,y) = y$

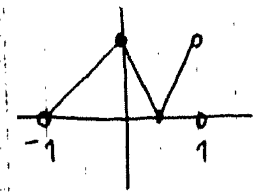
$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kont.

$f_2 :]-1,1[\to [0,1]$

kont. se nedan

$f_3(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$

$f_3 : [0,1] \to S$ kont.



$$f_2(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 < x \leq 0 \\ 1-2x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x-1, & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

Med $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ har vi en kont. fktn på D s.a. $f(D) = S$.

7) f är av klass C^1 i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ och därmed diff.bar där.

I punkten (0,0) måste vi använda def. av diff.barhet.

$$\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{2h^4 + h^3}{h \cdot h^2} = 2h + 1 \to 1 \text{ då } h \to 0 \quad \therefore \; \exists f'_x(0,0) = 1$$

$$\frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \frac{3k^4}{k \cdot k^2} = 3k \to 0 \text{ då } k \to 0 \quad \therefore \; \exists f'_y(0,0) = 0$$

f är diff.bar i (0,0) omm $\rho(h,k) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$

där

$$\rho(h,k) = \left(f(h,k) - f(0,0) - f'_x(0,0)h - f'_y(0,0)k \right) / \sqrt{h^2+k^2}$$

Vi har

$$\rho(h,k) = \left(\frac{2h^4 + 3k^4 + h^3}{h^2 + k^2} - h \right) / \sqrt{h^2+k^2} = \frac{2h^4 + 3k^4 - hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} =$$

$$= \begin{bmatrix} h = r\cos\theta \\ k = r\sin\theta \end{bmatrix} = \frac{2r^4\cos^4\theta + 3r^4\sin^4\theta - r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^3} =$$

$$= \underbrace{2r\cos^4\theta + 3r\sin^4\theta}_{\to 0,\ r \to 0} - \underbrace{\cos\theta\sin^2\theta}_{\text{olika för olika } \theta}$$

$\rho(h,k)$ saknar gränsvärde då $(h,k) \to (0,0)$.

Alltså är f ej diff.bar i hela $\mathbb{R}^2$. ▨