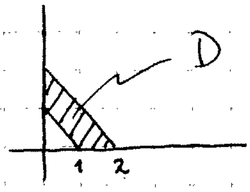
MMG 300 Flervariabelanalys, del 1, 2014-03-18

2 b) $\{(\cos(x+y), \ln(x^2+y^2), \sin(xy)) \in \mathbb{R}^3 ;\ 1 \le x+y \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$

$= f(D)$, där

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ 1 \le x+y \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ och

$f : D \to \mathbb{R}^3$; $f(x,y) = (\cos(x+y), \ln(x^2+y^2), \sin(xy))$.



D är kompakt och f är kontinuerlig.

Alltså ger satsen att $f(D)$ är kompakt.

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sin x$ är kont på $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ är inte kompakt, men $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ är kompakt

Alt. $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$; $f(\mathbb{R}) = \{0\}$ kompakt.

3) $r(t) = (2t^2+t, t-t^2, t^2)$. Obs. att $(15, -12, 9) = r(-3)$.

En tangentvektor till kurvan, i punkten $(15,-12,9)$, ges av $r'(-3) = (4t+1, 1-2t, 2t)\big|_{t=-3} = (-11, 7, -6)$

Tangenten till kurvan i punkten $(15,-12,9)$ har alltså ekvationen
$$\begin{cases} x = 15 - 11t \\ y = -12 + 7t \\ z = 9 - 6t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4) $f(x,y) = x^2 + y - \ln(xy)$

$f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1) = \frac{1}{2} + 1 - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} + \ln\sqrt{2}$

$f'_x(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1) = (2x - \frac{1}{x})\big|_{(\frac{1}{\sqrt{2}},1)} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = 0$

$f'_y(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1) = (1 - \frac{1}{y})\big|_{(\frac{1}{\sqrt{2}},1)} = 1 - 1 = 0$

$f''_{xx}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1) = (2 + \frac{1}{x^2})\big|_{(\frac{1}{\sqrt{2}},1)} = 2 + 2 = 4$

$f''_{yy}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1) = \frac{1}{y^2}\big|_{(\frac{1}{\sqrt{2}},1)} = 1$; $f''_{xy} = 0$

forts. 4) Taylorutv. av ordn. 2 i pktn $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ till f är

$$f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}+h, 1+k\right) = f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},1\right) + f'_x\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},1\right)h + f'_y\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},1\right)k +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(f''_{xx}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},1\right)h^2 + 2f''_{xy}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},1\right)hk + f''_{yy}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},1\right)k^2\right) + (h^2+k^2)^{3/2}B(h,k)$$

$$= \tfrac{3}{2} + \ln\sqrt{2} + 2h^2 + \tfrac{1}{2}k^2 + (h^2+k^2)^{3/2}B(h,k),$$ där

B är begränsad nära $(0,0)$.

Eftersom $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ är en stationär punkt och tillhörande kvadratiska form $Q(h,k) = 4h^2+k^2$ är positivt definit så är $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ en <u>lokal minimipunkt</u> till f. (f är av klass C^3 i omg. till $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$).

5) $f(x,y) = x^3 - y^3$ är kontinuerlig och mängden $D = \{(x,y);\ 2x^2+y^2 \le 4\}$ är kompakt (ellipsskiva).

Alltså antar f största o minsta värde på D.

Vi söker först stationära punkter i det inre av D:

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 = 0 \\ f'_y = -3y^2 = 0 \end{cases} \iff x = y = 0$$

$(0,0)$ är enda stationära pktn. och $f(0,0) = 0$.

Vi söker nu största o. minsta värde till f på ∂D (som säkert antas eftersom ∂D är kompakt). För dessa punkter gäller att $\nabla f \,/\!/\, \nabla g$, där $g(x,y) = 2x^2+y^2-4$, dvs $(3x^2, -3y^2) \,/\!/\, (4x, 2y)$, dvs.

$$0 = \begin{vmatrix} 3x^2 & 4x \\ -3y^2 & 2y \end{vmatrix} = 6x^2y + 12xy^2 = 6xy(x+2y) \iff$$

$x=0 \vee y=0 \vee x=-2y$. Insättning i bivillkoret $g(x,y)=0$

$x=0$: $g(0,y) = y^2-4 = 0 \iff y = \pm 2$

$y=0$: $g(x,0) = 2x^2-4 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$

$x=-2y$: $g(x,y) = 2(-2y)^2+y^2-4 = 9y^2-4 = 0 \iff y = \pm\frac{2}{3}$

Vi får följande "intressanta" punkter:

$(0, \pm 2)$, $(\pm\sqrt{2}, 0)$, $(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$

forts. 5) Funktionens värden i dessa punkter är

± 8, $\pm 2\sqrt{2}$, $\pm 72/27$

Eftersom $2\sqrt{2} < 8$ och $\frac{72}{27} < 8$ är

funktionens <u>största värde 8</u> och <u>minsta värde -8.</u>

6) $f'_x - 3x f'_y \overset{\circledast}{=} y$; $u = ax^2 + y$, $v = x$

Sätt $f(x,y) = g(u,v) = g(u(x,y), v(x,y))$. Då

$f'_x = g'_u u'_x + g'_v v'_x = 2ax g'_u + g'_v$

$f'_y = g'_u u'_y + g'_v v'_y = g'_u$ vilket ger

$\circledast \Leftrightarrow 2ax g'_u + g'_v - 3x g'_u = (2ax - 3x) g'_u + g'_v = y$

Välj nu $a = 3/2$ så fås $\circledast \Leftrightarrow g'_v = y \Leftrightarrow$

$g'_v = u - \frac{3}{2}v^2 \Leftrightarrow g(u,v) = uv - \frac{1}{2}v^3 + \varphi(u)$

$\Leftrightarrow f(x,y) = (\frac{3}{2}x^2 + y)x - \frac{1}{2}x^3 + \varphi(\frac{3}{2}x^2 + y)$

$= x^3 + yx + \varphi(\frac{3}{2}x^2 + y)$

Allmän lösn. till $\circledast$ är alltså

$f(x,y) = x^3 + xy + \varphi(\frac{3}{2}x^2 + y)$, där $\varphi \in C^1$ (godt).

$f(x,0) = x^3 + x^2$ ger $x^3 + \varphi(\frac{3}{2}x^2) = x^3 + x^2$, dvs.

$\varphi(\frac{3}{2}x^2) = x^2$. Alltså $\varphi(t) = \frac{2}{3}t$, vilket ger

$f(x,y) = x^3 + xy + x^2 + \frac{2}{3}y$

7) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ likf. kont.

(x_k) Cauchyföljd i $\mathbb{R}^n$. Visa $\big(f(x_k)\big)$ Cauchyf. i $\mathbb{R}^m$.

Tag godt. $\varepsilon > 0$. Vi ska "hitta" N s.a.

$$|f(x_k) - f(x_\ell)| < \varepsilon \quad \forall\, k,\ell \geq N$$

Eftersom f är likf. kont. finns $\underset{\delta = \delta(\varepsilon)}{\delta > 0}$ s.a.

(1) $\quad |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Eftersom (x_k) Cauchy finns $N = N(\delta)$ s.a.

(2) $\quad |x_k - x_\ell| < \delta \quad \forall\, k,\ell > N.$

Det följer nu, av (1) & (2), att

$$|f(x_k) - f(x_\ell)| < \varepsilon \quad \forall\, k,\ell > N.$$

$\blacksquare$