MMG300 Flervariabelanalys, del 1

Examinator: Ulla Dinger, Matematiska vetenskaper, tel 772 3559
Telefonvakt: tel 0709 107188
Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa. Språklexikon är tillåtet.

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 18 poäng krävs för betyget VG. Lösningsförslag läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok. Granskning sker i anslutning till undervisningen på del 2, tid meddelas på kurshemsidan.

---

1. (a) Definiera vad som menas med att en funktion f är differentierbar i en punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

(b) Visa att om $f(x, y)$ är en $\mathcal{C}^1$-funktion så är den differentierbar. (4p)

2. (a) Låt $f : D \to \mathbb{R}^m$, där D är en kompakt mängd i $\mathbb{R}^n$. Visa att bildmängden $f(D)$ är kompakt om f är kontinuerlig.

(b) Visa att mängden

$$\{(\cos(x + y), \ln(x^2 + y^2), \sin(xy)) \in \mathbb{R}^3;\ 1 \leq x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

är kompakt.

(c) Ge exempel på en kontinuerlig funktion f med icke-kompakt definitionsmängd D men där $f(D)$ är kompakt. (5p)

3. Bestäm en ekvation för tangenten till den parametriserade kurvan

$$r(t) = (2t^2 + t, t - t^2, t^2)$$

i punkten $(15, -12, 9)$. (3p)

4. Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 i punkten $(1/\sqrt{2}, 1)$ till funktionen

$$f(x, y) = x^2 + y - \ln(xy)$$

Avgör också om $(1/\sqrt{2}, 1)$ är en lokal extrempunkt till f. (3p)

5. Motivera att funktionen $f(x, y) = x^3 - y^3$ har ett största och ett minsta värde på mängden som ges av att $2x^2 + y^2 \leq 4$. Bestäm också dessa värden. (3p)

6. Lös differentialekvationen $f'_x - 3xf'_y = y$, t.ex. genom att göra ett variabelbyte av formen $u = ax^2 + y, v = x$ för lämplig konstant a.
Bestäm också den lösning som uppfyller $f(x, 0) = x^3 + x^2$. (4p)

7. Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara likformigt kontinuerlig. Visa att följden $(f(x_k))$ är en Cauchyföljd i $\mathbb{R}^m$ om (x_k) är en Cauchyföljd i $\mathbb{R}^n$. (3p)

Lycka till!
Ulla