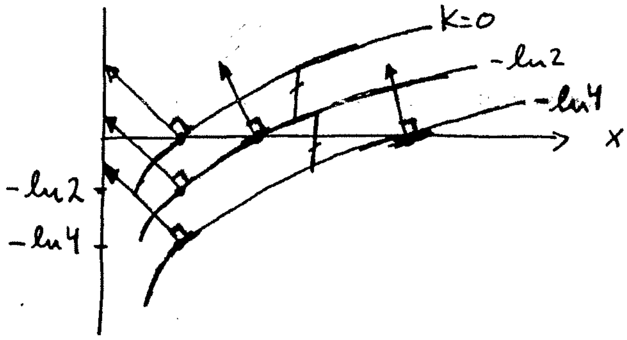
3) $f(x,y) = y - \ln x$, $\nabla f(x,y) = \left(-\frac{1}{x}, 1\right)$

$(x,y) =$	$(1,0)$	$(2,0)$	$(4,0)$	$(1,-\ln 2)$	$(1,-\ln 4)$
$f(x,y) =$	0	$-\ln 2$	$-\ln 4$	$-\ln 2$	$-\ln 4$
$\nabla f(x,y) =$	$(-1,1)$	$(-\frac{1}{2},1)$	$(-\frac{1}{4},1)$	$(-1,1)$	$(-1,1)$

Vi ska rita nivåkurvorna $f(x,y)=k$ för $k=0$, $k=-\ln 2$ och $k=-\ln 4 = -2\ln 2$. Vi har $f(x,y)=k \iff y = k + \ln x$, och får följande fig:



"Avståndet", vertikalt, mellan kurvorna är $\ln 2$.

4) Sätt $f(x,y,z) = 2x+y+z$ och $g(x,y,z) = x^2+y^2-z$.
Då $f(1,-2,4) = 4$ och $g(1,-2,4) = 1$. Alltså $P=(1,-2,4)$ ligger på skärningskurvan.
Planet $f(x,y,z)=4$ har normalvektor $\mathbf{n}_1 = (2,1,1)$ och nivåytan $g(x,y,z)=1$ har normalvektor $\nabla g(P) = (2x,2y,-1)\big|_P = (2,-4,-1) = \mathbf{n}_2$ i punkten P.
En tangentvektor till kurvan, i P, är vinkelrät mot både $\mathbf{n}_1$ och $\mathbf{n}_2$, och kan fås av

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = (3, +4, -10)$$

Tangenten har alltså ekvationen

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 4t \\ z = 4 - 10t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

5) $f(x,y,z) = x + 2y - 3$.

Sätt $g(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 108$. Då är

$M = \{(x,y,z) ; g(x,y,z) = 108\} = g^{-1}(\{108\})$ sluten

(ty $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kont o $\{108\}$ sluten i $\mathbb{R}$)

M är begränsad, ty $|x| \le \sqrt{108}$, $|y| \le \sqrt{108}/2$, $|z| \le \sqrt{108}/3$

för alla $(x,y,z) \in M$. $\therefore$ M kompakt (ellipsoid!)

Eftersom f kont o M kompakt antar f största o minsta värde på M. Dessa antas i några punkter där $\nabla f \parallel \nabla g$ enl Sats. Vi har

$$\nabla f \parallel \nabla g \iff (1,2,0) \parallel (2x, 8y, 18z) \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

Bivillkoret ger $(2y)^2 + 4y^2 = 108 \iff y^2 = \frac{108}{8} = \frac{27}{2} = 3^2 \cdot \frac{3}{2}$

$\iff y = \pm 3\sqrt{3/2} = \pm \frac{3}{2}\sqrt{6}$

Vi får punkterna $(x,y,z) = \pm\left(3\sqrt{6}, \frac{3}{2}\sqrt{6}, 0\right)$

som ger $f_{max} = f\left(3\sqrt{6}, \frac{3}{2}\sqrt{6}, 0\right) = 6\sqrt{6} - 3$

och $f_{min} = f\left(-3\sqrt{6}, -\frac{3}{2}\sqrt{6}, 0\right) = -6\sqrt{6} - 3$. ▨

6) $$f(x,y) = \frac{\sin x^2 y}{x^2 + y^2} = \underbrace{\frac{\sin x^2 y}{x^2 y}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}}_{\to 0} \to 0 \quad \text{då } (x,y) \to (0,0)$$

$$\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \begin{bmatrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{bmatrix} = \frac{r^3 \cos^2\theta \sin\theta}{r^2} = r\cos^2\theta \sin\theta \to 0, \quad r \to 0$$

Sätt $f(0,0) = 0$, så är f kont. på $\mathbb{R}^2$ (sluten)

Vi har även att $f(x,y) \to 0$ då $|(x,y)| \to \infty$.

Enl. Sats är f likf. kont. på $\mathbb{R}^2$, spec på $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

7) Sätt $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$ och
$g(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy$.

Då är f och g kontinuerliga på $\mathbb{R}^2$ och

$K = f^{-1}(\{a\})$ och $S = g^{-1}(\{a\})$ är slutna enl. Sats, ty $\{a\}$ är sluten i $\mathbb{R}$.

Vi ska visa att K är begränsad för varje a, men att S inte är begränsad för något a.

För $(x,y) \in K$ har vi $\boxed{\text{antag } a \geq 0 \text{ annars } K = \emptyset \text{ triv.}}$

$$x^2 + y^2 + xy = (x + \tfrac{1}{2}y)^2 + \tfrac{3}{4}y^2 = a \Rightarrow$$

$$|x + \tfrac{y}{2}| \leq \sqrt{a}, \quad |y| \leq 2\sqrt{a/3} \Rightarrow |x| \leq |\tfrac{y}{2}| + \sqrt{a} \leq (1 + \tfrac{1}{\sqrt{3}})\sqrt{a}$$

$\therefore$ K begränsad ok.

För $(x,y) \in S$ har vi (godt. $a \in \mathbb{R}$)

$$x^2 + y^2 + 3xy = (x + \tfrac{3}{2}y)^2 - \tfrac{5}{4}y^2 = a$$

Välj $y_n = n$ och sätt $x_n = -\frac{3}{2}n + \sqrt{a + \frac{5}{4}n^2}$,

där n så stort att $a + \frac{5}{4}n^2 > 0$.

Då gäller att $(x_n, y_n) \in S$ för alla (stora) n.
Eftersom $y_n \to \infty$ då $n \to \infty$, visar detta att S inte är begränsad.

$\blacksquare$

Alt. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\quad (x,y) \in S \Leftrightarrow r^2 + 3r^2\cos\theta\sin\theta = a \Leftrightarrow$

$$r^2(1 + \tfrac{3}{2}\sin 2\theta) = a \Leftrightarrow \tfrac{3}{2}\sin 2\theta = \tfrac{a}{r^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\theta = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{a}{r^2} - 1\right) \in [-1, 1] \text{ för "stora } r\text{"}$$

(beror på a)

$\therefore$ ~~$\exists(r,\theta)$~~ det finns hur stora r som helst s.a. $(x,y) \in S$ för lämpl. θ

$\therefore$ S obegr.