

MMG300 Flervariabelanalys, del 1

Examinator: Ulla Dinger, Matematiska vetenskaper, tel 772 3559  
Telefonvakt: tel 0703 088304  
Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa. Språklexikon är tillåtet.

---

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 18 poäng krävs för betyget VG.  
Lösningförslag läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok. Granskning sker på expeditionen på Matematiska vetenskaper.

---

Skriv fullständiga lösningar på alla uppgifter

1. Formulera och bevisa Taylors formel av andra ordningen för en funktion av två variabler. (4p)

2. (a) Definiera begreppet *Cauchyföljd* i  $\mathbb{R}^n$ .

(b) Visa att varje Cauchyföljd i  $\mathbb{R}^n$  är konvergent. (3p)

3. Låt  $f(x, y) = y - \ln x$ . Rita nivåkurvorna till  $f$  som går genom punkterna  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$  och  $(4, 0)$ . Rita i figuren även ut gradientvektorerna i de nämnda punkterna samt i punkterna  $(1, -\ln 2)$  och  $(1, -\ln 4)$ .

Tänk på att få figuren principiellt riktig! ( $\ln 2 \approx 0,7$  kan vara bra och veta) (3p)

4. Planet  $2x + y + z = 4$  skär ytan  $x^2 + y^2 - z = 1$  längs en kontinuerligt deriverbar kurva. Avgör om punkten  $(1, -2, 4)$  ligger på denna kurva, och bestäm i så fall kurvans tangent i  $(1, -2, 4)$ . (4p)

5. Undersök om funktionen  $f(x, y, z) = x + 2y - 3$  har ett största respektive minsta värde då  $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 108$ . Bestäm i så fall dessa. (4p)

6. Visa att funktionen

$$f(x, y) = \frac{\sin x^2 y}{x^2 + y^2}$$

är likformigt kontinuerlig på mängden där  $x^2 + y^2 \neq 0$ . (3p)

7. Låt  $a$  vara ett godtyckligt reellt tal. Sätt

$$K = \{(x, y) : x^2 + y^2 + xy = a\}$$

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 + 3xy = a\}$$

Förklara varför  $K$  och  $S$  är slutna mängder för varje  $a$ . Visa sedan att  $K$  är kompakt för varje  $a$ , men att  $S$  inte är kompakt för något  $a$ . (4p)

Lycka till!  
Ulla