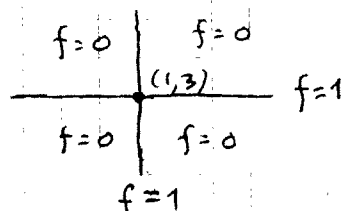


1c) Sätt $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{om } x=1 \text{ eller } y=3 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$



Då är f ej diff. bar i $(1,3)$, ty ej kont.

Men f är partiellt deriverbar i $(1,3)$; $f'_x(1,3) = f'_y(1,3) = 0$

2c) $M = \{(x,y); \cos(x+y) > \sin(xy) > 0\}$

Sätt $f(x,y) = \cos(x+y) - \sin(xy)$ och $g(x,y) = \sin(xy)$

Då är f och g kontinuerliga på hela $\mathbb{R}^2$ ($f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$),

och $M = \{(x,y); f(x,y) > 0\} \cap \{(x,y); g(x,y) > 0\}$ öppen, ty snitt av två öppna mängder (enl. Satsen i b).

3a) $\nabla f(1,2,e) = (2xy, x^2 + 2y, -\frac{1}{z})|_{(1,2,e)} = (4, 5, -\frac{1}{e})$

f växer snabbast i gradientens riktning, dvs. ↗

b) Gradienten är vinkelrät mot nivåytan i punkten, varför tangentplanets ekvation är:

$$4(x-1) + 5(y-2) - \frac{1}{e}(z-e) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x + 5y - z/e = 13$$

4) $f(x,y) = x^2y - x \ln y$. Vi söker alla stationära punkter*:

$$\begin{cases} f'_x = 2xy - \ln y = 0 & (1) \\ f'_y = x^2 - \frac{x}{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0 \vee x=1/y$$

Med $x=0$: (1) $\Leftrightarrow \ln y = 0 \Leftrightarrow y=1 \therefore (0,1)$ stat. p.

Med $x=1/y$: (1) $\Leftrightarrow 2 = \ln y \Leftrightarrow y = e^2 \therefore (e^{-2}, e^2)$ stat. p.

* Eftersom D_f är öppen finns ev. lokala extrempunkter bland de stationära!

forts. 4) För att avgöra karaktären hos de stationära punkterna betraktar vi den kvadratiske formen
 $Q(h,k) = f''_{xx} h^2 + 2 f''_{xy} hk + f''_{yy} k^2$ i resp. punkt.

Vi har $f''_{xx} = 2y$, $f''_{xy} = 2x - \frac{1}{y}$, $f''_{yy} = \frac{x}{y^2}$, och för
för $(0,1)$: $Q(h,k) = 2h^2 - 2hk = 2(h - \frac{k}{2})^2 - \frac{k^2}{2}$

Q är indefinit, ty $Q(1,0) > 0$, $Q(\frac{1}{2}, 1) < 0$.
 Vilket ger att $(0,1)$ är en sadelpunkt.

för (e^{-2}, e^2) : $Q(h,k) = 2e^2 h^2 + 2e^{-2} hk + e^{-6} k^2 =$
 $= e^{-6} [(k + e^4 h)^2 + e^8 h^2] > 0 \quad \forall (h,k) \neq (0,0)$

Q är pos. definit, vilket ger att (e^{-2}, e^2) är
lokal minimipunkt.

5) $\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+xy+y^2} = \underbrace{\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}_{\rightarrow 1 \text{ då } (x,y) \rightarrow (0,0)} \cdot \underbrace{\frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}}_{\text{undersöks närmare!}}$

$\frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2} = \left[\begin{smallmatrix} \text{polär} \\ \text{subst.} \end{smallmatrix} \right] = \frac{r^2}{r^2 + r^2 \cos \theta \sin \theta} = \frac{1}{1 + \cos \theta \sin \theta} \quad \begin{smallmatrix} \text{gränsv.} \\ \text{saknas} \\ \text{då } r \rightarrow 0, \theta \text{ godty} \end{smallmatrix}$

$\therefore f(x,y)$ saknar gränsvärde i $(0,0)$

omöjligt välja a s.a. f kont. i $(0,0)$.

6) Bivillkoret beskriver en kompakt mgd., ty med
 $g(x,y) = x^2 + x^4 y^4 + y^2$ har vi $\{(x,y); g(x,y) = 3\}$
 sluten end. Sats eftersom g kont. på $\mathbb{R}^2$.

Desutom gäller att $|x| \leq \sqrt{3}$, $|y| \leq \sqrt{3}$ för punkterna
 (x,y) med $g(x,y) = 3$. $\therefore$ sluten o. begränsad.

Eftersom f är kontinuerlig (i hela $\mathbb{R}^2$) så antar
 f både max. och min. på den kompakta mängden

forts. 6) Enl. Sats vet vi då att för max. resp. minipkt. gäller att ∇f och ∇g är parallella i punkten. Vi har

$$\nabla f = (y, x) \text{ och } \nabla g = (2x + 4x^3y^4, 4x^4y^3 + 2y)$$

$$\nabla f \parallel \nabla g \Leftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x + 4x^3y^4 & 4x^4y^3 + 2y \end{vmatrix} = 4x^4y^4 + 2y^2 - (2x^2 + 4x^4y^4) = 2(y^2 - x^2) \Leftrightarrow y = \pm x$$

$$\text{Vi har } g(x, \pm x) = x^2 + x^8 + x^2 = x^8 + 2x^2 = (x^2)^3 + 2x^2 = [t = x^2] = t^3 + 2t = 3$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

" $t=1$ " är lösning och entydig p.g.a. $t \mapsto t^3 + 2t$ str. växande

Max/min antas alltså i ngn. av $(1, \pm 1), (-1, \pm 1)$

Insättning i $f(x, y)$ ger att

$$f_{\max} = f(1, 1) = f(-1, -1) = 1$$

$$f_{\min} = f(1, -1) = f(-1, 1) = -1$$

7) Välj t.ex. $f(x) = g(x) = x$. Då är f och g likf. kont. på $\mathbb{R}$, t.y.

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| < \varepsilon \text{ om } |x - y| < \varepsilon \text{ (Välj } \delta = \varepsilon \text{ i def.)}$$

Men fg är inte likf. kont. på $\mathbb{R}$, t.y.

$$|(fg)(x) - (fg)(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y| |x + y| \text{ och}$$

med t.ex. $x_n = n$ och $y_n = n + \frac{1}{n}$ har vi

$$|(fg)(x_n) - (fg)(y_n)| = \frac{1}{n} (2n + \frac{1}{n}) \geq 2 \quad \forall n$$

trots att $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

