

MMG300 Flervariabelanalys, del 1

Examinator: Ulla Dinger, Matematiska vetenskaper, tel 772 3559

Telefonvakt: tel 0703 088304

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa. Språklexikon är tillåtet.

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 18 poäng krävs för betyget VG.

Lösningsförslag läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok. Granskning sker på expeditionen på Matematiska vetenskaper.

Skriv fullständiga lösningar på alla uppgifter

1. (a) Definiera vad som menas med att en funktion f är differentierbar i en punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.
 (b) Visa att en funktion som är differentierbar i en punkt $\mathbf{a}$ också är partiellt deriverbar i punkten.
 (c) Ge exempel på en funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ som är partiellt deriverbar men inte differentierbar i $(1, 3)$. (4p)

2. (a) Definiera begreppet *öppen mängd* i $\mathbb{R}^n$.
 (b) Visa att mängden $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \in M\}$ är öppen i $\mathbb{R}^n$ om M är öppen i $\mathbb{R}^m$ och $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}^n$.
 (c) Visa med hjälp av ovanstående sats att mängden $\{(x, y); \cos(x+y) > \sin(xy) > 0\}$ är öppen. (5p)

3. (a) Ange i vilken riktning funktionen $f(x, y, z) = x^2y + y^2 - \ln z$ växer snabbast i punkten $(1, 2, e)$.
 (b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan $x^2y + y^2 - \ln z = 5$ i punkten $(1, 2, e)$. (3p)

4. Bestäm alla lokala extrempunkter och sadelpunkter till funktionen

$$f(x, y) = x^2y - x \ln y. \quad (3p)$$

5. Avgör om det går att bestämma konstanten a så att funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+xy+y^2} & \text{om } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & \text{om } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

blir kontinuerlig i $(0, 0)$. Hur ska a i så fall väljas? (3p)

6. Motivera varför funktionen $f(x, y) = xy$ antar största och minsta värde under bivillkoret $x^2 + x^4y^4 + y^2 = 3$ samt bestäm dessa. (4p)

7. Ge exempel på reellvärda funktioner f och g som är likformigt kontinuerliga på $\mathbb{R}$ men där produkten fg inte är likformigt kontinuerlig på $\mathbb{R}$. Motivera dina påståenden väl! (3p)

Lycka till!

Ulla