MATEMATIK | **Hjälpmedel: Formelblad på baksidan**
Göteborgs Universitet | Datum: 2017-03-17 kl.08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Fanny Berglund, ankn. 5325.
Examinator: Sven Järner, Tel 031 7723561.

Flervariabelanalys, del 1, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12p ger betyget G, 18p ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. (a) Definiera vad som menas med att en funktion f är differentierbar i en punkt $\boldsymbol{a} \in R^n$.

   (b) Visa att om $f(x, y)$ är en C^1-funktion så är den differentierbar. (4p)

2. Visa att en delmängd M till R^n är kompakt om och endast om varje punktföljd i M har en konvergent delföljd med gränsvärde i M. (3p)

3. Visa att om $f(\boldsymbol{x})$ har lokalt extremvärde i en inre punkt $\boldsymbol{a}$ i definitionsmängden så är $f'_{x_j}(\boldsymbol{a}) = 0$ för j=1,..., n. (2p)

4. Låt $f(x, y) = 2 + x \sin y + y \ln x$

   (a) Ange i vilken rikting som f växer snabbast i punkten $(1, \pi)$. (1,5p)

   (b) Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i den punkt där $x = 1$ och $y = \pi$. (1,5p)

5. Låt mängden $M = \{\frac{1}{k+1} : k = 1, \ldots, \infty\} \cup \{\frac{k}{k+1} : k = 1, \ldots, \infty\}$ vara given.

   (a) Beskriv mängderna ∂M, Int$M$, $\overline{M}$. (1,5p)

   (b) Är M öppen? Är M Sluten? Är M begränsad? (1,5p)

   Du behöver ej motivera svaren. I (a) ger varje korrekt beskrivning 0,5p.
   I (b) ger tre rätt 1,5p, 2 rätt 0,5p och 1 eller 0 rätt 0p.

6. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x) = x^3 + y^3 + z^3$ på skärningen mellan ytorna $x + y + z = 1$ och $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (3p)

7. (a) Transformera den paartiella differentialekvationen $2f'_x - 3f'_y = e^{(x+y)/2}$ (2p) till de nya variablerna $u = 3x + 2y$, $v = x + y$.

   (b) Bestäm den lösning $f(x, y)$ som uppfyller villkoret $f(0, y) = y - 2e^{y/2}$. (2p)

8. Beräkna $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^3}\, dx$ genom att utgå från funktionen $F(s) = \int_0^\infty \frac{1}{s+x^2}\, dx$ och derivera under integraltecknet två gånger. (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}} \right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| \right)$$

Malaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\epsilon_n)\ , \ \text{där} \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$