MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen

Hjälpmedel: Formelblad på baksidan
Datum: 2017-06-09 kl.08.30–12.30
Telefonvakt: Adam Malik, ankn. 5325.
Examinator: Sven Järner, Tel 031 7723561.

Flervariabelanalys, del 1, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12p ger betyget G, 18p ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. Formulera och bevisa Taylors formel av andra ordningen för en funktion av två variabler. (4p))

2. (3p
   (a) Definiera begreppet *Cauchyföljd* i $\mathbb{R}^n$.
   (b) Visa att varje Cauchyföljd är konvergent.

3. Låt f och g vara av klass C^1. Antag att (a,b) är en inre punkt i D_f och i D_g som löser problemet att maximera $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y)=0$. Visa att då är $\text{grad} f(a,b)$ och $\text{grad} g(a,b)$ parallella. (3p)

4. Skissera följande mängder i $\mathbb{R}^2$. (4)
   (a) $\{(x,y);\, 4(x+1)^2+y^2 \le 4\}$.
   (b) $\{(x,y);\, |x+1| \le 1,\ |y|<2\}$.
   (c) $\{(x,y);\, |(x,y)| \le 1\} \cup \{(1,1)\}$.
   (d) $\{(x,y);\, |y-2x|<1$.

   Avgör för var och en av dem om den är öppen/sluten/kompakt/begränsad.
   Motivering krävs ej men tydlig figur är ett krav.

5. Bestäm största och minsta värde till funktionen $f(x,y)=ye^x-xy^2$ på området $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$. (3p)

6. Låt f vara en funktion av två variabler och a, b och c konstanter. Antag att $ax+by+cz=0$ är en ekvation för tangentplanet till $z=f(x,y)$ i punkten $(0,0,0)$. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z=(2+f(x,y))^2$ i samma punkt. (Svaret skall alltså uttryckas med hjälp av a, b och c.) (3p)

7. Låt $g(t)$ vara en funktion av en variabel. Bestäm konstanten a så att funktionen $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}g(\dfrac{x}{y})$ blir en lösning till differentialekvationen $xf'_x+yf'_y+af=0$ då $x>0,\ y>0$. (3p)

8. Undersök om funktionen f är differentierbar i $\mathbb{R}^2$ om $f(0,0)=0$ och $f(x,y)=\dfrac{2x^4+3y^4+x^3}{x^2+y^2}$ då $(x,y)\neq(0,0)$. $\mathbb{R}$ (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\,, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln\left|\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}}\right|\,, \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\,, \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)$$

Malaurinutvecklingar

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\varepsilon_n)\,, \quad \text{där} \quad \varepsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$