MATEMATIK **Hjälpmedel: Formelblad på baksidan**
Göteborgs Universitet Datum: 2017-08-18 kl.14.00–18.00
Tentamen Telefonvakt: Fanny Berglund, ankn. 5325.
Examinator: Michael Björklund.

Flervariabelanalys, del 1, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12p ger betyget G, 18p ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. (a) Definiera vad som menas med att en funktion f är likformigt kontinuerlig på en mängd $D \in \mathbb{R}^n$

   (b) Visa att en funktion f som är kontinuerlig på en kompakt mängd D också är likformogt kontinuerlig på D.

   (c) Visa att funktionen $f(x) = x\ln x$ är likformigt kontinuerlig på intervaller $]0,1]$.

   (d) Ge exempel på en funktion som är kontinuerlig men inte likformigt kontinuerlig på intervallet $]0,1]$. 5p.

2. Låt f vara en reellvärd funktion med definitionsmängd $D \in \mathbb{R}^n$.

   (a) Definiera vad som menas med att en punkt $a \in D$ är en *lokal maximipunkt* till f.

   (b) Antag att a är en inre punkt i D och att f är partiellt deriverbar i a. Visa att om då a är en lokal maximipunkt till f så är a en stationär punkt till f. 4p.

3. Bestäm ekvationen för tangenten till skärningskurvan mellan ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + z^2 = 10$ och planet $x - y - 2z = 1$ i punkten $(1,2,-1)$ 3p.

4. Skissera följande mängder i planet.

   (a) $M = \{(x,y);\ 3x^2 + 2y^2 < 6\} \cup \{(\sqrt{2},0)\}$.

   (b) $M = \{(x,y);\ x^2 + y^2 \geq 6y - 2x - 9\}$.

   (c) $M = \{(x,y);\ |(x,y)| < 2 \text{ och } |x+y| > 2\}$.

   Avgör för varje mängd om den är öppen/sluten/kompakt/sammanhängande. Du behöver inte bevisa dina påståenden men det skall tydligt framgå av figurerna vilka punkter som tillhör mängderna. Så var noga när du skissar. Inga poäng ges om figur saknas. 3p.

5. Bestäm den lösning till differentialekvationen $x^2 u'_x - u'_y = 0,\ x > 0$ som uppfyller villkoret $u(0,y) = e^y$, genom att göra substitutionen $x = s,\ y = \dfrac{1}{s} - t$. 3p.

6. Bestäm största och minsta värde till funktionen $f(x,y) = x^2 y e^{-(x+y)}$ på området givet av $x \geq 0,\ y \geq 0$ och $x + y \leq 4$. 4p.

7. Låt g vara en given kontinuerlig funktion. Visa att funktionen
$$f(x) = \frac{1}{4}\int_0^x (e^{2(x-t)} - e^{-2(x-t)})g(t)\,dt$$
är en lösning till differentialekvationen $y - 4y = g(x)$. 3p.

Lycka till!

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\,, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}} \right|\,, \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right|\,, \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| \right)$$

Malaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1} B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^{n+1} B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1} B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1} B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2} B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1} B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1 + \varepsilon_n)\,, \quad \text{där} \quad \varepsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$