MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Flervariabelanalys, del 1, MMG300
2018-03-16, kl. 8.30-12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Examinator: Andreas Rosén
Telefonvakt: Olof Giselsson, ankn. 5325

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 18 poäng krävs för betyget VG. Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.
Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas på kursens hemsida.

---

1. (a) Visa att om $M \subseteq \mathbf{R}^m$ är en öppen mängd och om $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ är en kontinuerlig funktion, så är den inversa bilden

$$\mathbf{f}^{-1}(M) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \ ; \ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in M\}$$

av M en öppen mängd. (2p)

(b) Avgör om det finns en kontinuerlig funktion $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ sådan att bildmängden

$$\mathbf{f}(D) = \{\mathbf{f}(x, y) \ ; \ x^2 + y^2 < 1\}$$

inte är en öppen mängd. (1p)

2. Bestäm alla skärningspunkter mellan tangentplanet till ytan

$$x^2 + 7y^2 - z^2 + 5 = 0$$

i $(x, y, z) = (2, 1, 4)$, och tangentlinjen till kurvan

$$(x, y, z) = (1/t, 1/t^2, t)$$

i $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. (3p)

3. Bestäm vilka värden som funktionen

$$f(x, y) = x^4 y + 2x^2 y^3 - x^2 y$$

antar på mängden $\{(x, y) \ ; \ xy \geq 1, x > 0\}$. Motivera din lösning väl! (4p)

4. Bestäm Taylorpolynomet av ordning 2 i punkten $(1, 2)$ till funktionen

$$f(x, y) = x^2 y^2 e^{-x^2 - y},$$

samt avgör om $(1, 2)$ är en lokal extrempunkt till f. (3p)

Var god vänd!

5. (a) Formulera implicita funktionssatsen för en punkt (a, b) på en nivåkurva $g(x, y) = 0$. (1p)

   (b) Antag att f och g är C^1-funktioner i en omgivning av (a, b), och att f antar ett extremvärde under bivillkoret $g(x, y) = 0$ i (a, b). Visa att vektorerna $\nabla f(a, b)$ och $\nabla g(a, b)$ är parallella. (2p)

6. (a) Bestäm alla lösningar $f(x, y)$ av klass C^2 till den partiella differentialekvationen

$$f''_{xx} - f''_{yy} = x^2 - y^2,$$

   genom att göra variabelbytet $u = x + y$, $v = x - y$. (3p)

   (b) Bestäm den lösning som uppfyller startvillkoret $f(x, 0) = f'_y(x, 0) = 0$ för alla $x \in \mathbf{R}$. (1p)

7. (a) Visa att det finns en kontinuerlig funktion $f(x, y)$ sådan att $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ då $y = 2x^2$ och $f(x, y) = 0$ då $y > 3x^2$ eller $y < x^2$. (1p)

   (b) Låt f vara en funktion som i (a). Avgör om f är differentierbar i $(0, 0)$. Motivera väl! (2p)

   (c) Bestäm de riktningar $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$, $|\mathbf{v}| = 1$, där riktningsderivatan av f som i (a) existerar i origo, och beräkna i dessa fall $f'_{\mathbf{v}}(0, 0)$. (2p)