Lösningsförslag till tentamen Flervariabelanalys, del 1, MMG300, 2018-03-16

1. Bevisets kärna: Tag $\mathbf{x} \in \mathbf{f}^{-1}(M)$. Det finns $\epsilon > 0$ då M är öppen så att $B(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \epsilon) \subseteq M$. Det finns sedan $\delta > 0$ då $\mathbf{f}$ är kontinuerlig så att $B(\mathbf{x}, \delta) \subseteq \mathbf{f}^{-1}(M)$. Se kursbokens bevis för fler detaljer. I (b) behöver inte bildmängden vara öppen. T ex $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ har endast origo som bildmängd, en icke-öppen mängd.

2. Sätt $f(x, y, z) = x^2 + 7y^2 - z^2 - 5$. $\nabla f(2, 1, 4) = 2(2, 7, -4)$ är normalvektor till tangentplanet ifråga. Detta ses ha ekvation $2x + 7y - 4z = -5$. Sätt $\mathbf{r}(t) = (1/t, 1/t^2, t)$. Vektorn $\mathbf{r}'(t) = (-1/t^2, -2/t^3, 1) = (-1, -2, 1)$ är tangent till linjen ifråga. Denna har parameterekvation $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(-1, -2, 1)$. Denna insatt i planets ekvation ger sökta skärningspunkter: $2(1 - t) + 7(1 - 2t) - 4(t + 1) = -5$. Detta ger $t = 1/2$, dvs punkten $P = (1/2, 0, 3/2)$.

3. Inre stationära punkter ges av $f'_x = 4x^3y + 4xy^3 - 2xy = 0$, $f'_y = x^4 + 6x^2y^2 - x^2 = 0$. Förkorta bort xy respektive x^2. Vi får fyra lösningar $(\pm 2, \pm 1)/\sqrt{10}$, men ingen ligger i området. På randen parametriserar vi med x. Låt $y = 1/x$ och betrakta $g(x) = f(x, 1/x) = x^3 + 2/x - x$ för $x > 0$. Stationära punkter ges av $g'(x) = 3x^2 - 2/x^2 - 1 = 0$, dvs $(3x^2 + 2)(x^2 - 1) = 0$. Vi får lösningen $x = 1$ och en kandidat $f(1, 1) = 2$ till extremvärde. Då området inte är kompakt undersöker vi gränsvärdet i området mot ∞.

$$f(x, y) = x^2y(x^2+2y^2-1) \geq x(x^2+y^2-1) \geq \tfrac{1}{y}(x^2+y^2-1) \geq \tfrac{1}{r}(r^2-1) \to \infty, \qquad \text{då } r \to \infty.$$

Utifrån denna undersökning och satserna om största och minsta värde och om mellanliggande värden resonerar vi oss på vanligt sätt fram till att värdemängden blir $[2, \infty)$.

4. Vi beräknar de partiella första- och andraderivatorna i $(1, 2)$: $f'_x = f'_y = 0$ och $f''_{xx} = -16e^{-3}$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = -2e^{-3}$. Detta ger Taylorpolynomet $p(h, k) = (4 - 8h^2 - k^2)e^{-3}$. Speciellt ser vi att $(1, 2)$ är en sträng lokal maximipunkt.

5. Implicita funktionsatsen säger att om g är en C^1-funktion i en omgivning av (a, b) och om $g'_y(a, b) \neq 0$, så existerar en C^1 envariabelfunktion $h(x)$ vars graf $\{(x, y) \ ; \ y = h(x)\}$ sammanfaller med nivåkurvan $\{(x, y) \ ; \ g(x, y) = 0\}$ i en omgivning av (a, b). Vi använder detta resultat och dess tvilling, $x = \tilde{h}(y)$ om $g'_x(a, b) \neq 0$, för att visa (b). Tre fall: (1) Om $\nabla g(a, b) = \mathbf{0}$ så är trivialt vektorerna parallella. (2) Om $g'_y(a, b) \neq 0$ så kan vi enligt implicita funktionssatsen parametrisera $g = 0$ med x: $(x, y) = (t, h(t))$. Om extremvärde föreligger då $t = x = a$ så får vi för $\tilde{f}(t) = f(t, h(t))$ att

$$\tilde{f}'(a) = f'_x(a, b) + h'(a)f'_y(a, b) = 0.$$

Då $(a, h'(a))$ är tangentvektor till $g = 0$ och $\nabla g(a, b)$ är normalvektor till $g = 0$ följer att gradienterna är parallella. (3) Om $g'_x(a, b) \neq 0$ resonerar vi analogt med (2) och parametriserar $(x, y) = (\tilde{f}(t), t)$.

6. Kedjeregeln visar att $h'_x = h'_u + h'_v$ och $h'_y = h'_u - h'_v$. Detta tillämpat på $h = f'_x$ och $h = f$ respektive $h = f'_y$ och $h = f$, transformerar ekvationen till

$$4f''_{uv} = uv.$$

Integration först med avseende på v och sedan med avseende på u visar att

$$f(u, v) = \tfrac{1}{16}u^2v^2 + C(u) + D(v),$$

där $C(t)$ och $D(t)$ är godtyckliga envariabelfunktioner. Den allmänna lösningen $f(x,y)$ blir alltså $f(x,y) = (x^2-y^2)^2/16+C(x+y)+D(x-y)$. För att finna C och D i (b), y-deriverar vi och sätter $y=0$. Vi får ekvationer $x^4/16+C(x)+D(x)=0$ och $C'(x)-D(x)=0$ som ska gälla för alla $x \in \mathbf{R}$. Integration av den andra ekvaionen ger $C(x)=D(x)+E$ för någon konstant E. Första ekvationen ger nu $D(x)=-x^4/32-E/2$ och $C(x)=-x^4/32+E/2$. Den sökta partikulärlösningen blir $f(x,y)=(x^2-y^2)^2/16-(x+y)^4/32-(x-y)^4/32$.

7. Låt $g(t) = 1-|t-2|$ då $1 \le t \le 3$ och $g(t)=0$ för övrigt. Funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} g(y/x^2), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

visar existensen i (a).

(b): Att f är differentierbar i origo innebär att det finns tal A och B så att

$$\lim_{(x,y)\to\mathbf{0}} (f(x,y)-f(0,0)-Ax-By)/\sqrt{x^2+y^2} = 0.$$

Vi vet att $f=0$ på koordinataxlarna, och på grund av kontinuitet att $f(0,0)=0$. Därför måste $A=f'_x(0,0)=0$ och $B=f'_y(0,0)=0$. Eftersom vi vet att $f(x,y)/\sqrt{x^2+y^2}=1$ på kurvan $y=2x^2$ in mot origo, så följer att f inte är differentierbar i origo.

(c): För $\mathbf{v}=(\pm 1,0)$ och $\mathbf{v}=(0,\pm 1)$ har vi redan konstaterat i (b) att riktningsderivatorna, dvs de partiella derivatorna, är 0 eftersom $f=0$ på koordinataxlarna. Låt nu $\mathbf{v}=(a,b)$ där $a,b\neq 0$. Betrakta en punkt $t(a,b)$ på linjen genom origo med riktningsvektor $\mathbf{v}$. Om $|tb| \ge 3(ta)^2$ så är $f(ta,tb)=0$. Alltså är $f=0$ längs linjen då $|t| \le |b|/(3a^2)$. Alla riktningsderivatorna $f'_{\mathbf{v}}(0,0)$ existerar alltså och är alla lika med 0.