MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Flervariabelanalys, del 1, MMG300
2018-06-08, kl. 14.00-18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Examinator: Andreas Rosén
Telefonvakt: Olof Elias, ankn. 5325

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 18 poäng krävs för betyget VG. Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.
Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas på kursens hemsida.

---

1. (a) Definiera vad som menas med att en följd $(\mathbf{x}_j)_{j=1}^{\infty}$ av punkter i $\mathbf{R}^n$ är en Cauchyföljd. (1p)

   (b) Visa att varje Cauchyföljd konvergerar i $\mathbf{R}^n$. (3p)

2. Betrakta mängden
$$M = \{e^{-k} \ ; \ k = 1, 2, 3, \ldots\}.$$
Beskriv mängderna ∂M, $\operatorname{Int} M$ och $\overline{M}$. Avgör om M är öppen, sluten respektive begränsad. (3p)

3. Bestäm alla stationära punkter till funktionen
$$f(x, y) = x + y - 3\ln(2 + xy)$$
i första kvadranten $x, y > 0$. Avgör vilka av dessa som är lokala maxima respektive minima. (3p)

4. (a) Förklara den geometriska betydelsen av derivatan $\mathbf{g}'(t)$ av en vektorvärd funktion $\mathbf{g} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ i en punkt $t \in \mathbf{R}$. (Åtminstone i de geometriska fallen $n = 2$ och $n = 3$.)

   (b) Definiera vad som menas med att en funktion $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ är differentierbar i en punkt $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

   (c) Formulera och bevisa kedjeregeln för beräkning av
$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{g}(t)).$$
(5p)

Var god vänd!

5. Betrakta funktionen

$$f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{z}}\arctan\frac{y}{x}$$

kring punkten $P=(\sqrt{3},1,\pi)$.

(a) Bestäm f:s maximala riktningsderivata i P.

(b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till den nivåyta till f som går genom P.

(3p)

6. Bestäm vilka värden som funktionen

$$f(x,y,z)=xy+yz$$

antar då $x^2+y^2+z^2=1$ och $x,y,z\in\mathbf{R}$. (4p)

7. Avgör för vilka värden på parametern $a\in\mathbf{R}$ som följande gränsvärden existerar, och beräkna gränsvärdet i dessa falll.

(a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+axy}$$

(b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2e^{-(x^2+y^2)^a}}{x^2+y^2}$$

(3p)