Lösningsförslag till tentamen Flervariabelanalys, del 1, MMG300, 2018-06-08

1. (a) Cauchyföljd betyder att för varje $\epsilon > 0$ finnes $N < \infty$ sådant att $|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n| < \epsilon$ för alla $m, n \geq N$.

   (b) Vi noterar först att en Cauchyföljd är begränsad. Tag nämligen $\epsilon = 1$ i definitionen. Då finns N så att speciellt $|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_N| < 1$ för alla $m \geq N$. (Tag $n = N$.) Det följer genom användning av omvända triangelolikheten att alla punkter i följden ligger i klotet kring origo med radie $r = \max(|\mathbf{x}_1|, |\mathbf{x}_2|, \ldots, |\mathbf{x}_{N-1}|, |\mathbf{x}_N| + 1)$.

   Då följden är begränsad finns enligt Bolzano–Weierstrass sats en delföljd $(\mathbf{x}_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ som konvergerar mot en punkt $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Vi visar nu att hela följden också konvergerar mot detta $\mathbf{x}$. Låt $\epsilon > 0$. Då finns $K < \infty$ sådant att $|\mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{x}| < \epsilon$ då $k \geq K$, eftersom delföljden konvergerar, men också $N < \infty$ sådant att $|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n| < \epsilon$ för alla $m, n \geq N$, eftersom följden är Cauchy. Välj nu $k \geq K$ så att $n_k \geq N$. Då följer med $n = n_k$ att

   $$|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}| = |(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{n_k}) + (\mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{x})| \leq |\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{n_k}| + |\mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{x}| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon,$$

   för alla $m \geq N$. Då $\epsilon > 0$ var godtyckligt, visar detta att hela följden konvergerar.

2. Mängden utgörs av en följd av punkter som konvergerar mot 0. Speciellt innehåller inte M några öppna icke-tomma intervall, så $\mathrm{Int}M = \emptyset$. De punkter x där värje intervall $B(x, r)$ innehåller både punkter från M och dess komplement, är alla $x \in M$ samt $x = 0$. Sålunda är $\partial M = M \cup \{0\}$. Det följer att $\overline{M} = \mathrm{Int}M \cup \partial M = M \cup \{0\}$.

   Då $M \subset B(0, 1)$ är mängden begränsad. Den är varken öppen eller sluten eftersom varken $\partial M \cap M = \emptyset$ eller $\partial M \subset M$.

3. De stationära punkterna ses genom partiell derivering vara lösningarna till

   $$2 + xy = 3x = 3y.$$

   Då $x = y$ får vi $x^2 - 3x + 2 = 0$, med lösningarna $x = 1$ och $x = 2$. De stationära punkterna är således $(x, y) = (1, 1)$ och $(2, 2)$. Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 3y^2/(2+xy)^2$, $f''_{yy} = 3x^2/(2 + xy)^2$ och $f''_{xy} = -3/(2 + xy) + 3xy/(2 + xy)^2$. I (1,1) ger detta oss den kvadratiska formen $Q = \frac{1}{3}(h^2 + 2(-2)hk + k^2) = \frac{1}{3}((h - 2k)^2 - 3k^2)$. Denna är indefinit, så $(1, 1)$ är ingen lokal extrempunkt. I (2,2) blir den kvadratiska formen $Q = \frac{1}{3}(h^2 + 2(-\frac{1}{2})hk + k^2) = \frac{1}{3}((h - \frac{1}{2}k)^2 + \frac{3}{4}k^2)$. Denna är positivt definit, så $(2, 2)$ är ett lokalt minimum.

4. (a) Bilden av $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ beskriver en kurva i $\mathbf{R}^n$. Vektorn $\mathbf{g}'(t) = (g_1'(t), \ldots, g_n'(t))$, om denna inte är nollvektorn, är en tangentvektor till denna kurva i punkten $\mathbf{g}(t)$.

   (b) f är differentierbar i $\mathbf{x}$ om det finns tal $A_1, \ldots, A_n \in \mathbf{R}$ sådana att

   $$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{h}|}(f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - A_1 h_1 + \ldots A_n h_n) = 0,$$

   där $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$. (Om f är differentierbar kan man då visa att dessa tal är entydigt bestämda och lika med de partiella derivatorna.)

   (c) Kedjeregeln säger att under förutsättning att $\mathbf{g}$ är deriverbar i $t \in \mathbf{R}$ och f är differentierbar i $\mathbf{x} = \mathbf{g}(t)$, så är den sammansatta funktionen $f(\mathbf{g}(t))$ deriverbar i t och dess derivata ges av

   $$\frac{d}{dt} f(\mathbf{g}(t)) = f'_{x_1}(\mathbf{x}) g_1'(t) + \ldots + f'_{x_n}(\mathbf{x}) g_n'(t).$$

Bevis: Låt $\mathbf{h} = \mathbf{g}(t+k) - \mathbf{g}(t)$ så att $\mathbf{x} + \mathbf{h} = \mathbf{g}(t+k)$. Användning av antagandet att f är differentierbar i t ger

$$\frac{1}{k}(f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})) = A_1 \frac{h_1}{k} + \ldots + A_n \frac{h_n}{k} + \frac{|\mathbf{h}|}{k}\rho(\mathbf{h}),$$

där ρ är en funktion sådan att $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \rho(\mathbf{h}) = 0$. Som noterat i (b) är $A_j = f'_{x_j}(\mathbf{x})$, $j = 1, \ldots, n$. Vidare har vi

$$\frac{h_j}{k} = \frac{g_j(t+k) - g_j(t)}{k} \to g_j'(t) \qquad \text{då } k \to 0.$$

För feltermen noterar vi att $\lim_{k\to 0^\pm} |\mathbf{h}|/k = \pm|\mathbf{g}'(t)|$, och speciellt är denna faktor begränsad i en omgivning av $k = 0$. Låter vi nu $k \to 0$ så följer kedjeregelsformeln.

5. Vi deriverar partiellt och finner gradienten

$$\nabla f(\sqrt{3}, 1, \pi) = \frac{1}{12\sqrt{\pi}}(-3, 3\sqrt{3}, -1).$$

Den maximala riktningsderivatan blir därmed $|\nabla f(\sqrt{3}, 1, \pi)| = \dfrac{\sqrt{37}}{12\sqrt{\pi}}$. Då tangentplanet har en normalvektor $(-3, 3\sqrt{3}, -1)$, beskrivs det av en ekvationen

$$-3(x - \sqrt{3}) + 3\sqrt{3}(y-1) - (z - \pi) = 0,$$

dvs $3x - 3\sqrt{3}y + z = \pi$.

6. Då vi vet att enhetssfären S är en kompakt och sammanhängande mängd, säger teorin att f där antar ett största och minsta värde samt alla däremellan liggande värden. Så bildmängden är ett kompakt intervall $[m, M]$. De möjliga punkter på S där m och M antas, vet vi vidare är de där vektorerna ∇f och ∇g är parallella, där $g(x, y, x) = x^2 + y^2 + z^2$. Då $\nabla g = 2(x, y, z) \neq \mathbf{0}$ på S får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = \lambda x \\ x + z = \lambda y \\ y = \lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$$

Fallet $\lambda = 0$: Vi får här $y = 0$, $x = -z$ och $z = \pm 1/\sqrt{2}$. Kandidater: $f(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}) = 0$ och $f(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) = 0$.

Fallet $\lambda \neq 0$: Vi får här $x = z = y/\lambda$ och $2y/\lambda = \lambda y$. Om $y = 0$ följer det att $x = z = 0$, vilket strider mot sista ekvationen. Därför har vi $y \neq 0$, och det följer då att $\lambda^2 = 2$. Så $x = z = \pm y/\sqrt{2}$, vilket ger $z^2 + 2z^2 + z^2 = 1$ i sista ekvationen. Kandidater: $f(1/2, 1/\sqrt{2}, 1/2) = 1/\sqrt{2}$, $f(1/2, -1/\sqrt{2}, 1/2) = -1/\sqrt{2}$, $f(-1/2, 1/\sqrt{2}, -1/2) = -1/\sqrt{2}$ och $f(-1/2, -1/\sqrt{2}, -1/2) = 1/\sqrt{2}$.

Den sökta värdemängden blir alltså $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$.

(Alternativ lösning: Rotera koordinatsystemet $\pi/4$ kring y-axeln och erhåll det ekvivalenta problemet att finna max oxh min för $f(x, y, z) = \sqrt{2}xy$ på S. Max- och minpunkter ligger uppenbarligen i planet $z = 0$, i de nya koordinaterna, och svaret hittas lätt med plan geometri.)

7. (a) Vi undersöker funktionen längs två olika kurvor in mot origo. Längs x-axeln $y = 0$ har vi funktionsvärden $= 1$. Långs linjen $y = -x$ har vi funktionsvärden $0/(2x^2 - ax^2)$. Då $a \neq 2$ har vi alltså två olika gränsvärden längs dessa kurvor, så tvåvariabelgränsvärdet kan nte existera. I fallet $a = 2$ är funktionen $= 1$, så i detta fall existerar uppenbarligen gränsvärdet och är 1.

   (b) Vi noterar först att gränsvärdet av $x^2/(x^2 + y^2)$ inte existerar, ty längs koordinataxlarna är funktionen 1 respektive 0. Då $a > 0$ får vi $e^{-(x^2+y^2)^a} \to 1$, och då $a = 0$ är $e^{-(x^2+y^2)^a} = e^{-1}$. I dessa fall existerar alltså inte det sökta gränsvärdet.

   För $a = -\epsilon < 0$, låt $r^{2a} = t$ med $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Detta ger

$$\frac{e^{-r^{2a}}}{r^2} = t^{1/\epsilon} e^{-t} \to 0, \qquad \text{då } t \to \infty,$$

   enligt standardgränsvärde. Eftersom $x^2 \to 0$ får vi att det sökta gränsvärdet existerar och är lika med 0, i fallet $a < 0$.