MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Flervariabelanalys, del 1, MMG300
2018-08-23, kl. 14.00-18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Examinator: Andreas Rosén
Telefonvakt: Adam Malik, ankn. 5325

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 18 poäng krävs för betyget VG. Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.
Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas på kursens hemsida.

---

1. (a) Definiera vad som menas med att en mängd $M \subseteq \mathbf{R}^n$ är sluten. (1p)

   (b) Visa att M är sluten om och endast om varje konvergent punktföljd i M har sitt gränsvärde i M. (3p)

2. Bestäm alla stationära punkter till funktionen

$$f(x, y) = x^2y^3 + 27xy - 27x.$$

   Avgör vilka av dessa som är lokala maxima respektive minima. (3p)

3. Visa att funktionen

$$f(x) = \int_0^x \sin(x - t)e^{t^2} dt$$

   är en lösning till differentialekvationen $f''(x) + f(x) = e^{x^2}$. Motivera väl! (3p)

4. Bestäm en funktion $f(x, y)$ som löser den partiella differentialekvationen

$$2xf'_x(x, y) - yf'_y(x, y) = y + xy$$

   för $x > 0$, $y > 0$, och som uppfyller $f(1, y) = e^{-y}$ för alla $y > 0$.
   Ledning: Variabelbytet $u = xy^2$, $v = y$ kan vara användbart. (3p)

Var god vänd!

5. (a) Definera vad som menas med att en funktion $f : D \to \mathbf{R}^m$ är likformigt kontinuerlig på en mängd $D \subseteq \mathbf{R}^n$. (1p)

   (b) Låt $f : D \to \mathbf{R}^m$ vara en kontinerlig funktion. Visa att om $D \subseteq \mathbf{R}^n$ är en kompakt mängd så är f likformigt kontinuerlig på D. (4p)

6. Bestäm vilka värden som funktionen

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 - x + 4y$$

antar då $0 \leq y \leq x \leq 1$. (3p)

7. (a) Skissa och klassificera (=namnge) andragradsytan $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$. (1p)

   (b) Bestäm alla plan som innehåller punkterna $(6, 0, 0)$ och $(0, 3, 0)$ och som tangerar ytan

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6.$$

(3p)