Lösningsförslag till tentamen Flervariabelanalys, del 1, MMG300, 2018-08-23

1. (a) Med att M är sluten menas att M innehåller alla sina randpunkter. En punkt $\mathbf{x}$ är en randpunkt om $B(\mathbf{x}, \epsilon)$ innehåller både punkter från M och dess komplement för varje $\epsilon > 0$.

   (b) Antag att M är sluten, och låt $M \ni \mathbf{x}_k \to \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$. Antingen är $\mathbf{a}$ en inre, rand- eller yttre punkt. Men $\mathbf{a}$ kan ej vara en yttre punkt för då vore $|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| \geq \epsilon > 0$ för alla k, vilket motsäger konvergensen. Alltså är $\mathbf{a}$ en inre punkt eller en randpunkt. Då M är sluten följer det att $\mathbf{a} \in M$.

   Antag omvänt att alla konvergenta följder i M har gränselement i M, och låt $\mathbf{a} \in \partial M$. För varje $k > 0$ kan vi då välja $\mathbf{x}_k \in M$ sådant att $|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| < 1/k$. Då $\mathbf{x}_k \to \mathbf{a}$ följer av antagandet att $\mathbf{a} \in M$. Så M är sluten.

2. De stationära punkterna är lösningar till $2xy^3 + 27y - 27 = 0 = 3x^2y^2 + 27x$. Från den andra ekvationen får vi två fall. Fall 1: $x = 0$. Detta ger $y = 1$ från första ekvationen. Fall 2: $xy^2 + 9 = 0$. Insatt i första ekvationen får vi $2(-9)y + 27y - 27 = 0$, dvs $y = 3$. Återigen första ekvationen ger nu $x = -1$. Vi har således de två stationära punkterna $(0, 1)$ och $(-1, 3)$. Andraderivatorna beräknas till $f''_{xx} = 2y^3$, $f''_{xy} = 6xy^2 + 27$, $f''_{yy} = 6x^2y$. I $(0, 1)$ beräknar vi kvadratisk form $Q = 2h^2 + 2 \cdot 27hk$, vilken ses vara indefinit. (Välj t ex $h = 1$ och $k = \pm 1$.) I $(-1, 3)$ beräknar vi

   $$Q = 2 \cdot 27h^2 + 2 \cdot (-27)hk + 18k^2 = 18(3(h - k/2)^2 + k^2/4)$$

   vilken genom kvadratkompletteringen ses vara positivt definit. Vi har alltså ett lokal minimum i $(-1, 3)$ och en sadelpunkt i $(0, 1)$.

3. Då integranden såväl som övre gränsen i integralen är kontinuerligt deriverbara, kan vi x-derivera under integraltecknet och i övre gränsen och får

   $$f'(x) = \int_0^x \cos(x - t)e^{t^2}\,dt + 1 \cdot \sin(x - x)e^{x^2} = \int_0^x \cos(x - t)e^{t^2}\,dt.$$

   Av samma anledning kan vi x-derivera igen och får

   $$f''(x) = \int_0^x (-\sin(x - t))e^{t^2}\,dt + 1 \cdot \cos(x - x)e^{x^2} = -f(x) + e^{x^2}.$$

   Detta visar att f löser den givna differentialekvationen.

4. Med kedjeregeln får vi sambanden $f'_x = y^2 f'_u$ och $f'_y = 2xyf'_u + f'_v$. Insatt i ekvationen får vi $-yf'_v = y + xy$, som i de nya variablerna blir $f'_v = -1 - u/v^2$. Integration map v ger allmän lösning

   $$f(x, y) = -v + u/v + g(u) = -y + xy + g(xy^2),$$

   där $g(t)$ är en godtycklig envariabelfunktion. Då $x = 1$ får vi $f(1, y) = g(y^2) = e^{-y}$. Med $t = y^2 > 0$ ser vi att $g(t) = e^{-\sqrt{t}}$ för $t > 0$. Alltså är lösningen på problemet $f(x, y) = -y + xy + e^{-y\sqrt{x}}$.

5. (a) f är likformigt kontinuerlig på D om det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \epsilon$ för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ sådana att $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta$.

(b) Antag D kompakt och f kontinuerlig, men, i syfte att uppnå en motsägelse, ej likformigt kontinuerlig. Den logiska motsatsen till (a) är då att det finns $\epsilon > 0$ sådant att det för alla $\delta > 0$ existerar $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ med $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta$ och $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \geq \epsilon$. För $\epsilon = 1/k$, beteckna dessa två punkter $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k$. Då D är kompakt har följden $(\mathbf{x}_k)$ en delföljd $(\mathbf{x}_{k_j})_j$ som konvergerar mot en punkt $\mathbf{a} \in M$. Eftersom

$$|\mathbf{y}_{k_j} - \mathbf{a}| \leq |\mathbf{y}_{k_j} - \mathbf{x}_{k_j}| + |\mathbf{x}_{k_j} - \mathbf{a}| \to 0, \qquad j \to \infty,$$

med användning av triangelolikheten, följer att även $(\mathbf{y}_{k_j})_j$ konvergerar mot $\mathbf{a}$. Av f:s kontinuitet följer motsägelsen

$$\epsilon \leq \lim_{j\to\infty} |f(\mathbf{x}_{k_j}) - f(\mathbf{y}_{k_j})| = |f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a})| = 0.$$

Detta visar att f måste vara likformigt kontinuerlig.

6. Mängden är den slutna triangeln med hörn i origo, $(1,0)$ och $(1,1)$, en kompakt och sammanhängande mängd. Vi vet således att värdemängden är ett slutet intervall, då f är kontinuerlig. Vi söker nu kandidater där max och min antas. I triangelns inre är kandidater de stationära punkterna: $2x - 3y - 1 = 0 = -3x + 2y + 4$. Lösningen till detta linjära ekvationssystem blir $(2,1)$. Men detta är en falsk lösning då den ligger utanför området.

   Längs x-axeln är $f(x,0) = x^2 - x = (x - 1/2)^2 - 1/4$, vilket ger kandidaten $f(1/2,0) = -1/4$. Längs $x = 1$ är $f(1,y) = y^2 + y = (y + 1/2)^2 - 1/4$, vilket inte ger någon kandidat $y \in (0,1)$. Längs $y = x$ är $f(x,x) = -x^2 + 3x = -(x - 3/2)^2 + 9/4$, vilket inte ger någon kandidat $x \in (0,1)$. Slutligen har vi tre kandidater i hörnpunkterna: $f(0,0) = 0$, $f(1,0) = 0$ och $f(1,1) = 2$. Jämförelse av de fyra kandidaterna ger att f antar värdena $[-1/4, 2]$ på triangeln.

7. (a) Ytan ifråga är en ellipsoid. För att skissa den: Tag enhetssfären, skala om den i koordinatrikningarna så att ytan skär x-axeln i $x = \pm\sqrt{6}$, y-axeln i $y = \pm\sqrt{3}$, och z-axeln i $z = \pm\sqrt{2}$.

   (b) Vi söker punkter (x,y,z) på ellipsoiden, där planet genom (x,y,z), $(6,0,0)$ och $(0,3,0)$ tangerar. Gradienten $\nabla f = 2(x, 2y, 3z)$ vet vi är en normalvektor till tangentplanet till ellipsoiden. Villkoret på (x,y,z) kan uttryckas som

$$\begin{cases} \nabla f \cdot ((x,y,z) - (6,0,0)) = 0, \\ \nabla f \cdot ((x,y,z) - (0,3,0)) = 0. \end{cases}$$

   Eftersom $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$, blir dessa ekvationer $6 - 6x = 0 = 6 - 6y$, dvs $x = y = 1$. Insatt i ellipsoidens ekvation följer $z = \pm 1$. De sökta tangentplanen i $(1,1,1)$ och $(1,1,-1)$ finner vi nu ha ekvationer $x + 2y + 3z = 6$ respektive $x + 2y - 3z = 6$.