Lösningar till MMG 300: I 2017-03-17

① Sats 2.3 i PB.

② Sats 1.15 i GLO

③ Sats 2.11 i PB.

---

④ a) f växer snabbast i gradientens riktning:

$\nabla f = (\sin y + \frac{y}{x},\ x\cos y + \ln x)$ och

$\nabla f(1,\pi) = \underline{(\pi, -1)}$

b) Tangentplanet till $z = f(x,y)$ i $(a, b, f(a,b))$:

$z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$. Här:

$z = 2 + \pi(x-1) - 1(y-\pi)$, dvs

$\underline{-\pi x + y + z = 2}$

---

⑤ a) $\partial M = \overline{M} = M \cup \{0, 1\}$, $\operatorname{Int} M = \emptyset$

b) M är varken öppen eller sluten men M är begränsad

---

⑥ Skärningen mellan sfären och planet är en sluten kurva i rummet och en sådan utgör en kompakt mängd och då f är kontinuerlig så finns största och minsta värde. Dessa inträffar i punkter där $\nabla f, \nabla g_1, \nabla g_2$ är linjärt beroende. Här är $\nabla f = (3x^2, 3y^2, 3z^2)$, $\nabla g_1 = \nabla(x+y+z) = (1,1,1)$ och $\nabla g_2 = (2x, 2y, 2z)$. Villkor:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = (z-x)(y-x)(z-y).$$

Dvs $x = z$, $x = y$ eller $z = y$

$\underline{x = z}$: $g_1 = 1$ ger $z = 1 - 2x$. Insatt $g_2 = 1$ ger

$6x^2 - 4x = 0$, $x = 0$ eller $x = 2/3$

Vi får punkterna $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ och $(0, 1, 0)$

P.s.s. ger $\underline{x = y}$ punkterna $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ och $(0, 0, 1)$

och $z = y$ – " – $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ och $(1, 0, 0)$

Det ger oss $f_{max} = 0^3 + 0^3 + 1^3 = \underline{1}$

och $f_{min} = (\frac{2}{3})^3 + (\frac{2}{3})^3 + (-\frac{1}{3})^3 = \underline{\frac{5}{9}}$

---

⑦ a) Kedjeregeln ger $f'_x = 3f'_u + f'_v$, $f'_y = 2f'_u + f'_v$, som ger ekvationen $-f'_v = e^{v/2}$

b) $f = -2e^{v/2} + g(u) = -2e^{(x+y)/2} + g(3x+2y)$

och $f(0,y) = -2e^{y/2} + g(2y)$, dvs $g(2y) = y$

eller $g(t) = t/2$. Vi får lösningen

$f(x,y) = \underline{\frac{3}{2}x + y - 2e^{(x+y)/2}}$

---

⑧ Med $f(s,x) = \frac{1}{s+x^2}$ är f och f'_x kontinuerlig för $\frac{1}{2} < s < 2$ (t.ex.) och $0 \le x < \infty$. Vidare är integralen konvergent för dessa s. Derivera

$F'(s) = \int_0^\infty -\frac{1}{(s+x^2)^2}\,dx$. Samma villkor är uppfyllda här och vi kan derivera igen

$F''(s) = \int_0^\infty \frac{2}{(s+x^2)^3}\,dx$.

Nu är $F(s) = \left[\frac{1}{\sqrt{s}} \arctan \frac{x}{\sqrt{s}}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{s}}$

och därmed $F''(s) = \frac{3\pi}{8 s^{5/2}}$

$s = 1$ i båda uttrycken för $F''(s)$ ger

$$\underline{\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx = \frac{3\pi}{16}}$$