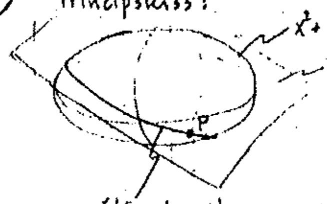
MMG300 Flervariabelanalys, del 1, 2017-08-18

1c) Eftersom $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ kan vi definiera $f(0)=0$. Då är f kontinuerlig på $[0,1]$ som är kompakt, varför f även är likformigt kont. på $[0,1]$ och speciellt på $]0,1]$.

3) Principskiss:



$x^2+2y^2+z^2=10$; $f(x,y,z) = x^2+2y^2+z^2$

$x-y-2z=1$

$P=(1,2,-1)$ tillhör både planet och ellipsoiden

Skärningskurvan γ.

Bestäm tangenten till γ i punkten P.

En normalvektor till planet är $n_1 = (1,-1,-2)$

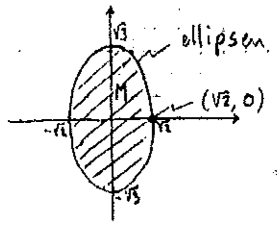
En normalvektor till ellipsoiden i punkten P är $\operatorname{grad} f(P) = (2x, 4y, 2z)\big|_P = (2,8,-2) = 2(1,4,-1)$

Välj $n_2 = (1,4,-1)$ som normalvektor till ellipsoiden i P. En tangentvektor till γ i P är parallell med

$$n_1\times n_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (1+8, -(-1+2), 4+1) = (9,-1,5)$$

$\therefore$ $v = (9,-1,5)$ är en riktningsvektor till $\overbrace{\text{tangenten}}^{\text{den sökta}}$, som alltså har ekvationen: $\begin{cases} x = 1+9t \\ y = 2-t \\ z = -1+5t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

4a)



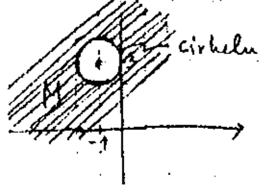
ellipsen $3x^2+2y^2=6$

M är ej öppen, ej sluten, ej kompakt,

M är sammanhängande.

b) $x^2+y^2 \geq 6y-2x-9 \iff x^2+y^2+2x-6y+9 \geq 0 \iff$

$(x+1)^2+(y-3)^2-1 \geq 0 \iff \underline{(x+1)^2+(y-3)^2 \geq 1}$

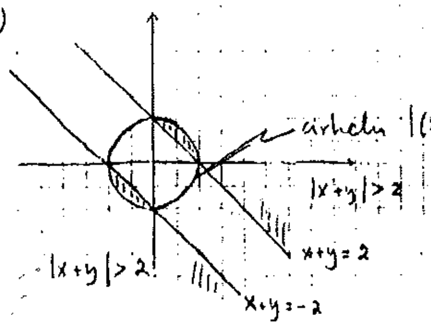


cirkeln $(x+1)^2+(y-3)^2=1$

M är ej öppen, ej kompakt

M är sluten, sammanh.

d)



M är öppen

ej sluten

ej kompakt

ej sammanh.

⑤ $\begin{cases} x = s \\ y = \frac{1}{s} - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{x} - y \\ s = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_x = u'_t\left(-\frac{1}{x^2}\right) + u'_s \cdot 1 \\ u'_y = u'_t(-1) + u'_s \cdot 0 \end{cases}$

Sätt in: $s^2 u'_s = 0$, dvs $u'_s = 0$, $u = g(t) =$

$= g\left(\frac{1}{x} - y\right)$, $u(0,y) = g(-y) = e^y$ ger $g(y) = e^{-y}$

och $g\left(\frac{1}{x} - y\right) = \underline{\underline{e^{y - 1/x}}}$

⑥ stat. punkter i det inre:

$\begin{cases} f'_x = (2xy - x^2y)\,e^{-(x+y)} = 0 \\ f'_y = (x^2 - x^2y)\,e^{-(x+y)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(2-x) = 0 \\ x^2(1-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ y = 1 \end{matrix}$

$f(2,1) = 4e^{-3}$. Randen: $x + y = 4$ ger

$x = 0$ och $y = 0$ ger $f(x,y) = 0$.

$f(x,y) = g(x) = x^2(4-x)e^{-4} = (4x^2 - x^3)e^{-4}$ och

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = 8x - 3x^2 = x(8 - 3x)$, dvs $x = \frac{8}{3}$, $y = \frac{4}{3}$.

$f\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) = g\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \frac{4}{3} e^{-4} = \frac{256}{27} e^{-4} < \frac{4}{e^3} \quad \left(\frac{64}{27e} < 1\right)$

Svar största värdet $= \underline{\frac{4}{e^3}}$, minsta $= \underline{0}$

⑦ Med $h(x,t) = \left(e^{2(x-t)} - e^{-2(x-t)}\right) g(t)/4$ har vi

$h'_x(x,t) = \left(2e^{2(x-t)} + 2e^{-2(x-t)}\right) g(t)/4$ och

$h''_{xx}(x,t) = \left(4e^{2(x-t)} - 4e^{-2(x-t)}\right) g(t)/4 = 4h(x,t)$.

Eftersom h, h'_x och h''_{xx} är kontinuerliga i R^2 kan vi derivera f "under integral-tecknet" enl:

$$f'(x) = \int_0^x h'_x(x,t)\,dt + \underbrace{h(x,x)}_{=0} \cdot \underbrace{\tfrac{d}{dx}x}_{=1}$$

$$f''(x) = \int_0^x \underbrace{h''_{xx}(x,t)}_{=4h(x,t)}\,dt + \underbrace{h'_x(x,x)}_{=g(x)} \cdot 1 =$$

$$= 4\int_0^x h(x,t)\,dt + g(x) = 4f(x) + g(x)$$

$\therefore\ f''(x) - 4f(x) = g(x)$ VSB.