DUBBELINTEGRAL

Låt Δ vara en axelparallell rektangel i xy-planet:

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

En *partition* P av Δ är en indelning av Δ i mindre, axelparallella rektanglar: $\Delta = \cup_{i=1}^{n} \cup_{j=1}^{m} \Delta_{ij}$, där

$$\Delta_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1} \leq x < x_i, y_{i-1} \leq y < y_i\},$$

och $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$.

Med en **trappfunktion** Φ av två variabler menas en funktion på Δ sådan att

$$\Phi(x, y) = c_{ij} = \text{konst } (x, y) \in \Delta_{ij}$$

för någon partition $\{\Delta_{ij}\}$ av Δ.

Dubbelintegralen av Φ över Δ definieras som talet

$$\iint \Phi(x, y) dxdy := \sum_{i,j} c_{ij} \mu(\Delta_{ij}),$$

där $\mu(\Delta_{ij})$ är arean av rektangeln Δ_{ij}, dvs.

$$\mu(\Delta_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Om $c_{ij} > 0$ kan termen $c_{ij}\mu(\Delta_{ij})$ tolkas som volymen av ett rätblock med bas Δ_{ij} och höjd c_{ij}.

Räkneregler:

1. Om α är en konstant så gäller

$$\iint_\Delta \alpha f dxdy = \alpha \iint_\Delta f dxdy$$

2.
$$\iint_\Delta (f + g) dxdy = \iint_\Delta f dxdy + \iint_\Delta g dxdy$$

3. Om $f(x, y) \leq g(x, y)$ på Δ så är

$$\iint_\Delta f dxdy \leq \iint_\Delta g dxdy$$

4.
$$|\iint_\Delta f dxdy| \leq \iint_\Delta |f| dxdy$$

5. Om Δ är delad i två axelparallella rektanglar Δ_1 och Δ_2 så är

$$\iint_\Delta f dxdy = \iint_{\Delta_1} f dxdy + \iint_{\Delta_2} f dxdy$$

Viktig formula:

$$\iint f dxdy = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx$$

(itererad enkelintegrering)

Def.1 Funktionen f är integrerbar över rektangeln Δ om det är så att för varje tal ϵ finns det trappfunktioner Φ och Ψ sådana att $\Phi \leq f \leq \Psi$ och

$$\iint_\Delta \Psi dxdy - \iint_\Delta \Phi dxdy < \epsilon.$$

Sats 1. On f är integrerbar över Δ så finns precis ett tal λ med egenskapen att

$$\iint \Phi dxdy \leq \lambda \leq \iint_\Delta \Psi dxdy$$

för alla trappfunktioner Φ och Ψ med $\Phi \leq f \leq \Psi$.

Def. 2 Låt f vara integrerbar över Δ. Den entydigt bestämda talet λ i Sats 1 kallas **dubbelintegralen** av f över Δ och betecknas

$$\iint f(x,y)dxdy.$$

Sats 2 Om f är integrerbar funktion över rektangeln $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ och om enkelintegralerna i högerledet existerar så gäller

$$\iint_\Delta f dxdy = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx. \tag{1}$$

Motsvarande utsaga gäller också med omvänd integrationsordning högerledet.

Sats 3. Om f är kontinuerlig på den kompakta rektangeln $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ så är den integrerbar på Δ. Vidare existerar den itererade enkelintegralen i (1). Således kan denna formeln användas för beräkning av $\iint_\Delta f dxdy$. Samma gäller för omkastad integreringsordning.