DUBBELINTEGRAL

Dubbelintegral över allmännare områden:
Antag att $f(x, y)$ är definierad och begränsad på ett *begränsat* område D.
Välj en axelparallell rektangel Δ som innehåller D. Låt $f_D(x, y)$ vara en utvidgning av f till Δ som ges av

$$f_D(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{om } (x,y) \in D \\ 0 & \text{om } (x,y) \notin D \end{cases}$$

Vi säger att f är **integrerbar över** D om f_D är integrerbar över någon rektangel Δ som omfattar D och vi sätter

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f_D(x,y)dxdy$$

Obs! Definitionen är oberoende av valet Δ.

Räkneregler:

1. $$\iint_D \alpha f dxdy = \alpha \iint_D f dxdy \ (\alpha \text{ konstant})$$
2. $$\iint_D (f+g)dxdy = \iint_D f dxdy + \iint_D g dxdy$$
3. $f \leq g$ på $D \Rightarrow \iint_\Delta f dxdy \leq \iint_\Delta g dxdy$
4. $$|\iint_D f dxdy| \leq \iint_D |f| dxdy$$
5. $D_1 \cap D_2 = \emptyset \Rightarrow$
$$\iint_{D_1 \cup D_2} f dxdy = \iint_{D_1} f dxdy + \iint_{D_2} f dxdy$$

Om D inte är en rektangel så blir oftast $f_D(x, y)$ icke kontinuerlig (diskontinuitet på randen) och vi kan inte använda föregående sats direkt. Men om randen är snäll"(en nollmängd) har den ingen betydelse.

Nollmängder

Def. 6.4 En mängd N i planet kallas en **nollmängd** om vi för varje $\epsilon > 0$ kan täcka över N med ändligt många axelparallella rektanglar vars sammanlagda area är högst ϵ.

En mängd D kallas **kvadrarbar** om dess rand är en nollmängd.
Unionen av två nollmängder är en nollmängd.

Lemma 6.1 Grafen till en kontinuerlig funktion av en variabel $y = \varphi(x)$ utgör en nollmängd.

Lemma 6.2 Antag att f är likformigt kontinuerlig och begränsad på en kvadrerbar mängd D. Då är f integrerbar över D.

Lemma 6.3 Varje begränsad funktion f är integrerbar över en nollmängd N och

Nollmängder har ingen betydelse

Dubbelintegraler över speciella område.

Ett område D kallas y-*enkelt* om det kan skrivas

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\},$$

där $y = c(x)$, $y = d(x)$ är kontinuerliga kurvor.

Sats 6.4 Om f är kontinuerlig på D så är f integrerbar över D och

$$\iint_D f(x, y)dA = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

(Dubbelintegralen beräknas genom upprepad integrering).
Obs! Vi kan byta rollerna av x och y och prata om x-enkla område.

Medelvärde.

Låt f vara kontinuerlig på en kompakt mängd D. Då har f ett sörsta och ett minsta värde M och resp. N. Om D är en sammanhängande mängd antar f alla värde i intervallet $[M, N]$.
Vi har alltså $M \leq f(x, y) \leq N$ och därmed om $\mu(D)$ är arean av D

$$M\mu(D) \leq \iint_D |f(x, y)|dxdy \leq N\mu(D)$$
$$M \leq \frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x, y)dxdy \leq N.$$

Därför
Medelvärdesatsen. Det finns $(x_0, y_0) \in D$ så att

$$\iint_D f(x, y)dA = f(x_0, y_0) \cdot (\text{ arean av } D).$$

$f(x_0, y_0)$ kallas medelvärdet för f på D.

APPROXIMATION MED RIEMANNSUMMOR

Låt Δ vara en kompakt rektangel och $P = \{\Delta_k\}$ är en indelning i delrektanglar.
En **Riemannsumma** till $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erhålls om man väljer en punkt (x_k, y_k) i varje delrektangel Δ_k och bildar summan

$$R(f, P) = \sum_k f(x_k, y_k)\mu(\Delta_k).$$

Om f är kontinuerlig på D så är

$$R(f, P) \to \iint_\Delta f dxdy$$

vid obegränsad förfinda indelning.

Utvidgad variant av Riemannsummor:

Låt D vara en kvadrerbar mängd och $\{D_k\}$ är en indelning av D i disjunkta kavdrerbara delmängderna D_k.
Sats 6.5 Om f är kontinuerlig på D så gäller att

$$\sum_k f(x_k, y_k)\mu(\Delta_k) \to \iint_D f dxdy$$