YTOR OCH YTINTEGRALER

En parametriserad yta i rummet är en kontinuerlig funktion $\mathbf{r}$ definierad på en rektangel $R = \{(s,t) : a \leq s \leq b, c \leq t \leq d\}$ (eller annat slutet begränsat område med väldefinierad area) i st-planet och med värden i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)), (s,t) \in R.$$

Om man plottar punkterna $(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ i rummet för alla värdena av (s,t) så får man en yta i rummet.

En parametriserad yta är *glatt* eller C^1 om funktionen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ som ger parametriseringen är av klass C^1 och $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \neq 0$ för alla s och t.

Tangentplanet till ytan i den punkt som har parametervärdena (s,t) spänns upp av vektorerna $\mathbf{r}'_s(s,t)$ och $\mathbf{r}'_t(s,t)$, $\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t(s,t)$ är en normal till ytan.

Ytan kallas *styckvis glatt* om den är sammansatt av glatta ytor, "hopp-klistradelängs randkurvor.

Låt $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s,t)$ vara en parameterframställning av en glatt yta $\mathcal{S}$ $\mathcal{S}$ i rymden. Då är

$$dS = ||\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t||dsdt$$

ett areaelement och arean av ytan $\mathcal{S}$ blir

$$\iint_{\mathcal{S}} dS := \iint_R ||\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}||dsdt.$$

Ytintegralen av en funktion $f(x,y,z)$ över ytan $\mathcal{S}$ definieras enligt

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)dS = \iint_R f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))||\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}||dsdt.$$

VEKTORFÄLT

Ett **vektorfält** i planet är en funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = (f(x,y), g(x,y)).$$

Vi uppfattar (x,y) som en punkt i planet och $F(x,y)$ som en vektor i planet. För att åskadligöra vektorfältet väljer vi ett antal punkter (x_i, y_i) och avsätter vektorerna $F(x_i, y_i)$ i respektive punkter.

KURVINTEGRALER

Låt $\mathbf{F}$ vara ett kontinuerligt vektorfält i planet: $\mathbf{F}(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ med definitionsmängd D (enöppen mängd). Om $\mathcal{C}$ är en orienterad

C^1 kurva i D med parameterframstälningen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$ så kallas uttrycket

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_a^b (f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t))dt$$

för *kurvintegralen av fältet* $\mathbf{F}$ längs kurvan $\mathcal{C}$.
Den betecknas $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ eller $\int_{\mathcal{C}} f dx + g dy$. I det senare fallet talar vi också om *kurvintegralen av differentialformen* $f dx + g dy$.

- Defintionen av kurvintegralen är oberoende av valet av parameter för den (orienterade) kurvan.
- Om $-\gamma$ är kurvan γ genomlupen i omvänd riktning så är

$$\int_{-\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Om $\mathcal{C}$ är styckvis C^1-kurva med C^1 bitar $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n$ definieras kurvintegralen som

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \ldots + \int_{\mathcal{C}_n} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Om kurvan $\mathcal{C}$ är sluten kallas ofta kurvintegralen för cirkulationen av $\mathbf{F}$ runt $\mathcal{C}$ och betecknas $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Den fysikaliska tolkningen av kurvintegralen är det arbete fältet utför (dvs den energi som fältet tillför en partikel) för att förflytta partikeln längs kurvan.
