Lösningar till tentan i Flervariabelanalys
2018 05 29

4. $\left|\frac{(-3)^n}{(1+n^2)^{1/3}}\right|^{1/n} = \frac{3}{(1+n^2)^{1/3n}} \to 3,\ n \to \infty$

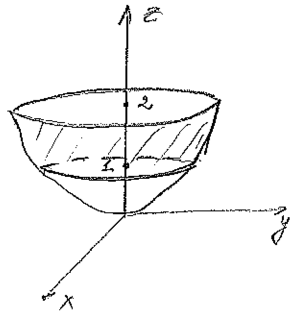
Enligt huvudsatsen för potensserier och konvergensradieformeln konvergerar serien för alla $x \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$ och divergerar då $|x| > \frac{1}{3}$

$x = \frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n^2)^{1/3}}$ som är konvergent enligt Leibniz sats

$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)^{1/3}}$, eftersom $\frac{1}{(1+n^2)^{1/3}} \geq \frac{1}{2^{1/3} n^{2/3}}$ och $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ är divergent, blir serien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{(1+n^2)^{3/2}}$ divergent i $x = -\frac{1}{3}$

Svar: $x \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

5.



Volymen $= \iiint_K 1 \cdot dx\,dy\,dz$

Låt K_1 vara den kropp som begränsas av $z = x^2+y^2$ och $z = 1$ och

låt K_2 vara den kropp som begränsas av $z = x^2+y^2$ och $z = 2$

Volymen av K = Volymen av K_2 − volymen av K_1

Volymen av $K_2 = \iiint_{K_2} 1\,dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 2} \left(\int_{x^2+y^2}^{2} 1\,dz\right) dx\,dy =$

$= \iint_{x^2+y^2 \leq 2} \left(2 - (x^2+y^2)\right) dx\,dy = \left| \begin{array}{l} \text{Polära koord} \\ x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right|$

$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2) r\,dr\,d\varphi \right. =$

$= 2\pi \left(r^2 - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi$

Volymen av $K_1 = \iiint_{K_1} 1\,dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\int_{x^2+y^2}^{1} 1\,dz \right) dx\,dy = \left| \begin{array}{l} \text{Polära koord} \\ x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right.$

$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1} (1 - r^2) r\,dr\,d\varphi \right. =$

$= 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{1} = \frac{\pi}{2}$

Svar: volymen av $K = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$.

6.

$$\operatorname{rot} \mathbb{F} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2+\alpha z & 2xy & 3z^2-x \end{vmatrix} = e_1 \cdot 0 - e_2(-1-\alpha) + e_3(2y-2y) = (0, 1+\alpha, 0)$$

Eftersom $\mathbb{R}^3$ är enkelt sammanhängande, blir $\mathbb{F}$ konservativt <u>om och endast om</u> $1+\alpha = 0$ ($\operatorname{rot}\mathbb{F} = 0$)

För att beräkna en potential U, sätter vi upp systemet av diff. ekvationer:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = y^2 - z \\ \frac{\partial U}{\partial y} = 2xy \\ \frac{\partial U}{\partial z} = 3z^2 - x \end{cases}$$

Ur 1a ekv fås
$U(x,y,z) = (y^2-z)x + C(y,z)$

Sätt uttrycket för U i 2a ekv:
$\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy + C'_y(y,z) = 2xy$
varav $C'_y(y,z) = 0$ och
$C(y,z) = D(z)$

dvs
$U(x,y,z) = (y^2-z)x + D(z)$

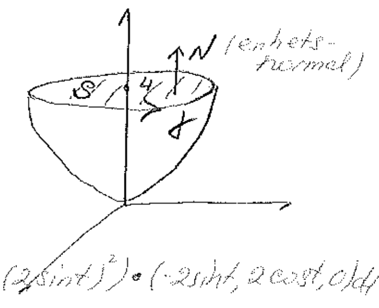
Sätt i 3e ekv:
$\frac{\partial U}{\partial z} = -x + D'(z) = 3z^2 - x$

Detta ger $D'(z) = 3z^2$ och $D(z) = z^3 + K$, K const.

En potential till $\mathbb{F}$ blir alltså
$U(x,y,z) = y^2x - zx + z^3$

Svar: $U(x,y,z) = y^2x - zx + z^3$

7. Kurvan har en parametrisering
$r(t) = (2\cos t, 2\sin t, 4)$, $t \in [0, 2\pi]$



$$\int_\gamma \mathbb{F} \cdot dr = \int_0^{2\pi} \mathbb{F}(2\cos t, 2\sin t, 4) \cdot r'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} ((4\sin^2 t + 2\sin t)\cdot 4, (2\cdot 2\sin t - 1)\cdot 2\cos t \cdot 4, 2\cos t \cdot (2\sin t)^2) \cdot (-2\sin t, 2\cos t, 0)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-16(2\sin^2 t + 2\sin t)\sin t + 16(4\sin t - 1)\cos^2 t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-16 + (52\sin^2 t + 48\cos^2 t)\sin t)\, dt = -32\pi + 0 = -32\pi$$

Enligt Stokes sats får vi

$$\int_\gamma \mathbb{F} \cdot dr = \iint_S (\operatorname{rot}\mathbb{F}) \cdot N\, dS$$, där S och N som på bilden

S kan parametriseras enligt $r(u,v) = (u, v, 4)$
med $u^2 + v^2 \leq 4$

Med den valda parametriseringen blir
$r'_u \times r'_v = (0, 0, 1) = N$

$$\operatorname{rot} \mathbb{F} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (y^2+y)z & (2y-1)xz & 2xy^2 \end{vmatrix} = e_1(2xy-(2y-1)x) - e_2(y^2-(y^2+y)) + e_3((2y-1)z-(2y+1)z)$$

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbb{F} \cdot N \, dS = \iint_{u^2+v^2 \le 4} \operatorname{rot} \mathbb{F}(u,v,4) \cdot (0,0,1) \, du\,dv =$$

$$= -8 \iint_{u^2+v^2\le 4} du\,dv = -8 \cdot \pi \cdot 4 = -32\pi.$$

Svar: -32π

8. Ansätter lösningen $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$
Eftersom $y(0)=1$, blir $a_0 = 1$. Ur ekvationen får vi också $0\cdot y''(0) + 2y'(0) - 0\cdot y(0) = 1$ och $y'(0) = 1/2$.
Om vi sätter in potensserien i diff. ekvationen får vi som koef. framför x^k, när $k>0$, i vänstra ledet

$$(k+1)k a_{k+1} + 2(k+1)a_{k+1} - a_{k-1}$$

Enligt högra ledet ska detta vara 0, dvs

$$(k+1)(k+2) a_{k+1} = a_{k-1}$$

och

$$a_{k+1} = \frac{a_{k-1}}{(k+1)(k+2)}$$

Tillsammans med $a_0 = 1$ och $a_1 = 1/2$ (Obs! $y'(0) = 1/2$)

får vi formeln

$$a_k = \frac{1}{(k+1)!}$$

Detta ger lösningen

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$$

Eftersom $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

blir $x y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1 = e^x - 1$

som ger $y(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

Svar: $\frac{e^x-1}{x}$