MMG300 Flervariabelanalys, del 2, vt 18
Några uppgifter som man kan öva på inför tentan

Dubbelintegraler:

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D e^{y^3} dA$$

där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$ (Tips: tänk på integrationsordning). Svar: $\frac{1}{3}(e-1)$

2. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (x^2 + y^2) dA$$

där D är det triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,1)$ och $(0,2)$. Svar: $\frac{4}{3}$

3. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (x^2 - y^2) dA$$

där D är det område i andra kvandranten som avgränsas av y-axeln, linjen $y = -x$ och cirkeln $x^2 + y^2 = 1$. (Bra att veta: $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos(2\alpha)$). Svar: $-\frac{1}{8}$

Trippelintegraler:

1. Beräkna volymen av den kropp K som begränsas av den koniska ytan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och sfärerna $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, dvs $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ (Tips: sfärisk substitution). Svar: $\frac{14\pi}{3}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$

2. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytorna $z = 8 - x^2 + y^2$ och $z = x^2 + 3y^2$. Svar: 16π

3. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_D xz\,dx\,dy\,dz,$$

där $D = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z < y, x^2 + y^2 \leq 4\}$. Svar: $\frac{16}{3}$

Vektorfält, kurvintegraler, ytintegraler:

1. (a) Vad menas med att ett vektorfält är konservativt?

   (b) Låt $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (\sin(y - z), (y + x\cos(y - z)), -x\cos(y - z))$. Bestäm rotationen rot$\boldsymbol{F}$. Svar: rot $\boldsymbol{F} = 0$

   (c) För $\boldsymbol{F}$ i (b) beräkna det arbete som $\boldsymbol{F}$ uträttar för att förflytta en partikel rätlinjigt från $(\pi, \pi/2, \pi/2)$ till $(2\pi, \pi/2, 0)$. Svar: 2π

2. Låt $\boldsymbol{F}(x, y) = (3x^2y^2 - \frac{\sin x}{1+x^2}, 2y(x^3 + e^{-y^2}))$

   (a) Låt γ vara linjestycket från $(-2, 2)$ till $(2, -2)$. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$. Svar: 64

   (b) Är $\boldsymbol{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^2$? Motivera väl.

   (c) Beräkna det arbete som $\boldsymbol{F}$ uträttar då en partikel förflyttas från $(-2, 2)$ till $(2, -2)$ medurs längs ellipsen $2x^2 + 3y^2 = 20$ Svar: 64

3. Låt S vara den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ där $x \geq 0$, $z \geq 0$.

   (a) Beskriv ytan S i sfäriska koordinater.

   (b) Beräkna ytintegralen $\iint_S z dS$. Svar: $\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$

4. Beräkna arean av ytan Y: $r = r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (u^2, 2uv, 2v^2)$. $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2$. Svar: 24

Greens formel, divergenssats, Stokes' sats:

1. Betrakta vektorfältet $\boldsymbol{F}(x, y) = (-y \sin(x^3), y^2)$.

   (a) Beräkna m h a Greens formel arbetet som $\boldsymbol{F}$ uträttar längs randen C positivt orienterad till området D som ges av $0 \leq y \leq x^2$, $0 \leq x \leq 1$. Svar: $\frac{1}{3}(1 - \cos 1)$

   (b) Beräkna $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, där γ är den del av randen C som ligger på parabeln $y = x^2$ (Tips: använd resultat i (a)). Svar: $-\frac{\cos 1}{3}$

2. Betrakta vektorfälet $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (xz, yz, 1)$. Låt S vara ytan vilken utgör randen till kroppen i $\mathbb{R}^3$ som ges av olikheterna $1 \geq z \geq x^2 + y^2$. Ytan S är orienterad med utåt pekande normalen

   (a) Med hjälp av divergenssatsen beräkna flödet av $\boldsymbol{F}$ ut genom S. Svar $\frac{2\pi}{3}$

   (b) Beräkna flödesintegral $\iint_{S_0} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$, där S_0 är den del av S som ligger på paraboloiden $z = x^2 + y^2$. Svar: $-\frac{\pi}{3}$

3. Låt C vara kurvan som ges av parametriseringen $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 2\sin 2t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ och låt $\boldsymbol{F}(x, y, z) = ((e^x - y^3), (e^y + x^3), e^z)$. Visa att kurvan C ligger i ytan $z = xy$ och cylindern $x^2 + y^2 = 4$ och använd Stokes sats för att beräkna kurvintegralen $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$. Svar: 24π