MMG300 Flervariabelanalys, del 2, vt 18
Vecko–PM läsvecka 4

Persson-Böiers: 9.1, 9.2, 9.3, 9.4, 10.1

Innehåll: Vektoranalys i planet: Kurvintegraler. Differentialformer. Greens formel. Exakta differentialformer. Vektoranalys i rummet: Kurvintegraler och Ytintegraler.

Integraler. Denna vecka riktar vi vår uppmärksamhet åt kapitel 9 och 10 som till stor del handlar om *vektorfält* i palnet och rummet och dess tillämpningar. Vektorfält dyker upp naturligt inom många områden t.ex. för att beskriva olika typer av krafter (gravitation, magnetiska, elektrostatiska mm) eller flöden (av vätska, gas, energi mm). Per definition är ett vektorfält (i planet/rummet) en funktion $\mathbf{F}$ från $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ och en naturlig tolkning är att $\mathbf{F}(x, y, z)$ (i rummet), som alltså är en vektor i $\mathbb{R}^3$, beskriver hastigheten hos en partikel i ett visst flöde som befinner sig i punkten (x, y, z).
I avsnitt 9.1 skall vi definiera en s. k. *kurvintegral* och se hur man kan beräkna det arbete som ett visst kraftfält utför på en partikel som rör sig utefter en given kurva i planet. Med hjälp av kurvintegralen skall vi beräkna hur mycket av ett visst flöde som passerar genom en given kurva. Greens formel i 9.2 är viktig. Den knyter ihop kurvintegraler och dubbelintegraler. Med hjälp av Greens formel kan vi beräkna areor av plata figurer samt flödet ut ur ett område i $\mathbb{R}^2$.
I avsnitt 9.3 skall vi studera en speciell klass av vektorfält i planet som kallas *konservativa* fält eller *potentialfält*. Det är vektorfält $\mathbf{F}$ som är gradienten av någon reelvärd funktion $\phi(x, y)$ dvs. $\mathbf{F} = \text{grad}\phi$. Funktionen ϕ sägs i så fall vara en (skalär) *potential* till vektorfältet. Som vi skall se har sådana konservativa vektorfält flera användbara egenskaper, och de spelar en viktig roll i teorin om vektorfält. Att differentialformen $Pdx + Qdy$ är exakt betyder att vektorfältet (P, Q) är ett potenialfält. Sats 9.2 berättar att potentialfält har den värdefulla egenskapen att deras kurvintegraler är oberoende av vägen. I kapitel 10 skall vi prata om vektorfält i rummet. Kurvintegraler av sådana vektorfält definieras på samma sätt som kurvintegraler av vektorfält i planet. Vi skall se hur man med ytintegraler kan beräkna hur mycket av ett visst flöde som passerar genom en given yta per tidsenhet.

Mål: Du måste kunna:

- definiera begreppet kurvintegral av ett vektorfält och beräkna sådana integraler (9.1)
- tillämpa kurvintegral för att bestämma arbete av ett vektorfält (9.1)
- bevisa Greens formel (sats 9.1)
- tillämpa Greens formel för att beräkna areor och tvådimensionellt flöde (9.3)
- definiera begreppet konservativt vektorfält (potentialfält) i ett område och beräkna potential till ett potentialfält (9.4)
- definiera begreppet exakt differentialform (9.4)
- bevisa sats 9.2 som berättar att potentialfält har egenskapen att deras kurvintegraler är oberoende av vägen
- bevisa sats 9.3 som berättar att endast potentialfält i bågvis sammanhängande område har kurvintegraler som är oberoende av vägen.
- tillämpa sats 9.2 vid beräkning av kurvintegraler (se exempel 16)

- definiera kurv- och ytintegraler av vektorfält i rummet. (10.1)
- beräkna kurv- och ytintegraler av vektorfält i rummet då kurvan/ytan är parametriserad eller av vanligare typ som du själv bör kunna parametrisera (10.1)

Rekommenderade uppgifter, Persson-Böiers

Dag	Räkna själva	Räkna på tavlan
Ti 24/4	**9.** 2a, 3c, 9, 12	**9.** 2b, 3ab, 4, 8, 14
To 26/4	**9.** 24, 26, 30, 33, 35, 40, 46	**9.** 25, 31, 34, 37, 43
Fre 27/4	**10.** 1, 2, 7, 10	**10.** 3, 11