MMG300 Flervariabelanalys, del 2, vt 18
Vecko–PM läsvecka 5

Persson-Böiers: 10.2-10.5

Innehåll: Vektoranalys i rummet: Gauss's sats. Stokes sats. Rotation. Potential för vektorfält i rummet.

Integraler. Kapitel 10 handlar mycket om vilken information som $\mathbf{div}\,\mathbf{F}$ och $\mathbf{rot}\ \mathbf{F}$ ger om ett vektorfält $\mathbf{F}$. Man kan säga att $\mathbf{div}\,\mathbf{F}(x, y, z)$ ger uttryck för hur mycket vektorfältet verkar ut från (eller in mot) punkten $P = (x, y, z)$. Om vektorfältet representerar ett flöde så kan man tänka på $\mathbf{div}\,\mathbf{F}(x, y, z)$ som *källstyrkan* i punkten P dvs. hur mycket av flödet (t.ex. gas, radioaktivitet eller dyl) som "skapas/produceras" i punkten. Antag t.ex. att vi studerar flödet genom en sluten yta (t.ex. en sfär). Om det flödar mer ut ur området (som ytan begränsar) än in så måste det ju på något sätt produceras/skapas flöde inuti området dvs. finnas punkter där $\mathbf{div}\,\mathbf{F} > 0$. Om det inte sker någon källproduktion alls dvs. om $\mathbf{div}\,\mathbf{F} \equiv 0$ så sägs vektorfältet vara *källfritt*. Den andra viktiga operationen rot $\mathbf{F}$ i detta kapitel ger istället uttryck för vektorfältets tendens att virvla/rotera i en omgivning av P. Till skillnad mot $\mathbf{div}\,\mathbf{F}$ (som ger ett värde) så ger rot $\mathbf{F}$ en vektor i varje punkt. Riktningen på vektorn anger den axel kring vilket vektorfältet roterar mest. Om $\mathbf{rot}\ \mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$ så sägs vektorfältet vara *virvelfritt*.

Avsnitt 10.4 innehåller en del räknelagar för ovanstående differentialoperatorer. Avsnitten 10.2-10.3 handlar om två viktiga satser (Gauss's och Stokes sats) som har stort teoretiskt intresse och är av central betydelse inom många områden/tillämpningar, inte minst för att analysera och lösa partiella differentialekvationer. Det huvudsakliga innehållet i satserna beskrivs av formler som knyter samman mycket av det vi arbetat med under del 2 av kursen;

$$\oint_{\partial D} F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy \qquad (Greens\ formel)$$

$$\iiint_K \mathbf{div}\,\mathbf{F}\, dV = \iint_{\partial K} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\, dS \qquad (Gauss's\ formel)$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{rot}\,\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\, dS \qquad (Stokes's\ formel)$$

I avsnitt 10.5 ska vi prata om potentialer för konservativa vektorfält i rummet. Bl.a. är det så att om ett vektorfält är virvelfritt i ett enkelt sammanhängande område så är det också konservativt där.

Mål: Du måste kunna:

- beräkna divergens, div$\mathbf{F}$, och rotation, rot$\mathbf{F}$ för ett vektorfält $\mathbf{F}$ (16.1)
- tolka divergensen som flödestäthet
- tolka rotationen som virveltäthet
- definiera begreppet källfritt och virvelfritt vektorfält
- formulera och tillämpa divergenssatsen (sats 10.1)
- formulera och tillämpa Stokes sats (sats 10.2)
- definiera begreppet konservativt vektorfält (potentialfält) i ett område och beräkna potential till ett potentialfält (10.5)

Rekommenderade uppgifter, Persson-Böiers

Dag	Räkna själva	Räkna på tavlan
To 3/5	**10.** 18, 20, 53	**10.** 21, 54