MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Flervariabelanalys, del 1, MMG300
2019-08-22, kl. 14.00-18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Examinator: Andreas Rosén
Telefonvakt: Johannes Borgqvist, ankn. 5325

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 18 poäng krävs för betyget VG. Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.
Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

---

1. (a) Definiera vad som menas med att en funktion f är differentierbar i en punkt $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$. (4p)

   (b) Visa att om f är en C^1-funktion i en omgivning av $\mathbf{a}$, så är f differentierbar i $\mathbf{a}$.

2. Bestäm ekvationen för tangentlinjen till skärningskurvan mellan ellipsoiden $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$ och planet $x - 2y - z = 1$ i punkten $(1, -1, 2)$. (3p)

3. Avgör om följande mängder är öppna, slutna, kompakta respektive sammanhängande. (4p)

   (a) $D_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ 2x^2 + 3y^2 < 6\} \cup \{(0, \sqrt{2})\}$

   (b) $D_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 \geq 6x - 2y - 9\}$

   (c) $D_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ |(x, y)| < 2 \text{ och } |x + y| > 2\}$

Var god vänd!

4. (a) Definiera vad som menas med att en funktion är likformigt kontinuerlig på en mängd $D \subset \mathbf{R}^n$. (5p)

   (b) Visa att en funktion som är kontinuerlig på en kompakt mängd D också är likformigt kontinuerlig på D.

   (c) Visa att $f(x) = \sin(x)/x$ är likformigt kontinuerlig på $(0, 1]$.

   (d) Ange en funktion som är kontinuerlig men inte likformigt kontinuerlig på $(0, 1]$.

5. Bestäm alla lokala extrempunkter och sadelpunkter till funktionen (3p)

$$f(x, y) = 3\ln(1 + x^2 + y^2) + 2xy.$$

6. Bestäm största och minsta värde av $f(x, y, z) = x^2 + yz$ då (4p)

$$x^2 + y^2 - 12 \leq z \leq -4,$$

om sådana finns.

7. Låt $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Visa att (2p)

$$u(x) = \frac{1}{6} \int_0^x (e^{3(x-t)} - e^{-3(x-t)}) f(t) dt$$

är en lösning till differentialekvationen $u'' - 9u = f$.