MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Flervariabelanalys, del 1, MMG300
2019-03-22, kl. 8.30-12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Examinator: Andreas Rosén
Telefonvakt: Olof Giselsson, ankn. 5325

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 18 poäng krävs för betyget VG. Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.
Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

---

1. Bestäm en funktion $u(x, y)$ som löser den partiella differentialekvationen

$$xyu'_x - u'_y = x^2 e^{y^2}$$

för $x > 0$, och som uppfyller $u(x, 0) = e^{x^2}$ för alla $x > 0$.
Ledning: Variabelbytet $s = x^2 e^{y^2}$, $t = y$ kan vara användbart. (3p)

2. Låt $D \subseteq \mathbf{R}^n$ vara en given mängd.

   (a) Ange en egenskap hos punktföljder $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ i D som är ekvivalent med att D är kompakt. (1p)

   (b) Visa att om $\mathbf{f} : D \to \mathbf{R}^m$ är kontinuerlig och D är kompakt, så är bildmängden $\mathbf{f}(D)$ kompakt. (3p)

   (c) Ge exempel på en kontinuerlig funktion $\mathbf{f}$ på en mängd D som inte är kompakt, men där $\mathbf{f}(D)$ är kompakt. (1p)

3. Bestäm alla punkter (x, y) där funktionen

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + y^3$$

har ett lokalt maximum respektive lokalt minimum. (3p)

Var god vänd!

4. (a) Definiera vad som menas med att en funktion $g : D \to \mathbf{R}$ är likformigt kontinuerlig på en mängd $D \subseteq \mathbf{R}^n$. (1p)

   (b) Antag att $f(t,x)$ och $f_t'(t,x)$ är kontinuerliga på kvadraten $0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1$. Visa att

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 f(t,x)dx = \int_0^1 f_t'(t,x)dx$$

   för $0 < t < 1$. Satser rörande likformig kontinuitet får användas utan bevis, om tydlig formulering ges. (3p)

5. Bestäm alla punkter på ytan

$$z^2 = x^2 + y^2 + 3xy + 2$$

   där tangentplanet innehåller punkten $(17, 0, 2)$ och är parallellt med x-axeln. (3p)

6. Bestäm samtliga värden som funktionen

$$f(x,y) = x^2 + 6xy + y^2,$$

   antar i området där $x^2 + y^2 \leq 5$ och $x \geq -1$. (3p)

7. (a) Definieras vad som menas med att en funktion $f(x,y)$ är differentierbar i en punkt (a,b). (1p)

   (b) Avgör om funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-y)^4 + x^3 + xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

   är differentierbar i $(0,0)$. (3p)