Lösningsförslag MMG300 190322

(1) Enligt kedjeregeln:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} = 2xe^{y^2}\frac{\partial u}{\partial s} + 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial t} = 2x^2ye^{y^2}\frac{\partial u}{\partial s} + 1\cdot\frac{\partial u}{\partial t}$$

PDE blir

$$xy\left(2xe^{y^2}\frac{\partial u}{\partial s}\right) - \left(2x^2ye^{y^2}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}\right) = x^2e^{y^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -x^2e^{y^2} = -s$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(u(s,t) + st) = 0$$

$\Leftrightarrow u(s,t) + st = g(s) =$ oberoende av t.

Tillbaka i xy-planet är allmänna lösningen

$$u(x,y) = -x^2e^{y^2}\cdot y + g(x^2e^{y^2}) \qquad (*)$$

För att finna envariabelfunktionen g sätter vi $y=0$:

$$e^{x^2} = u(x,0) = -0 + g(x^2), \quad \forall x>0$$

($e^{x^2} = u(x,0)$: givet)

$$\Leftrightarrow e^t = g(t), \quad \forall t>0$$

Insatt i $(*)$ får vi

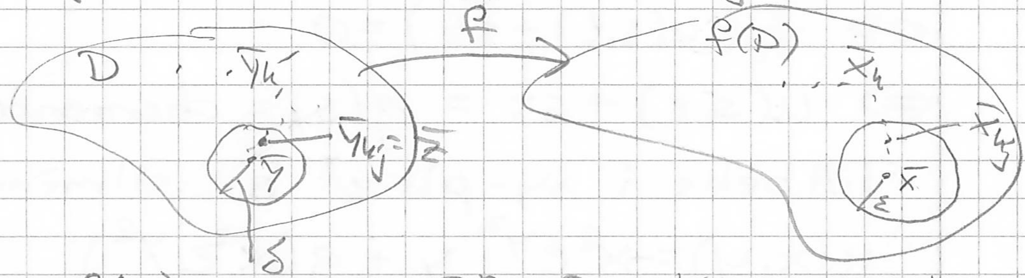
<u>Svar</u>: $u(x,y) = -x^2ye^{y^2} + e^{x^2e^{y^2}}$

(2) (a) Att D är kompakt, dvs sluten och begränsad, är ekvivalent med att varje följd $(\bar{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ i D har en delföljd $(\bar{x}_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ som konvergerar mot en punkt $\bar{x}\in D$.

(b) Låt $(\bar{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ vara en godtycklig följd i $\bar{f}(D)$.
Då $\bar{x}_k \in \bar{f}(D)$ finns $\bar{y}_k \in D$ så att $\bar{f}(\bar{y}_k) = \bar{x}_k$.
Då D är kompakt, har följden $(\bar{y}_k)_{k=1}^{\infty}$ i D en delföljd $(\bar{y}_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ som konvergerar mot en punkt $\bar{y}\in D$. Låt $\bar{x} := \bar{f}(\bar{y}) \in \bar{f}(D)$.
Vi ska nu visa att motsvarande

delföljd $(\bar{x}_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ i $\bar{f}(D)$ konvergerar mot $\bar{x}$. Detta visar då att $\bar{f}(D)$ är kompakt.

Tag därför $\varepsilon > 0$. Då $\bar{f}$ är kontinuerlig i $\bar{y}$, finns $\delta > 0$ så att $|\bar{f}(\bar{z}) - \bar{f}(\bar{y})| < \varepsilon$ om $|\bar{z} - \bar{y}| < \varepsilon$, $\bar{z} \in D$. Då $\bar{y}_{k_j} \to \bar{y}$ finns $N < \infty$ så att $|\bar{y}_{k_j} - \bar{y}| < \delta$ om $j \geq N$. Med $\bar{z} = \bar{y}_{k_j}$ får vi alltså $|\bar{f}(\bar{y}_{k_j}) - \bar{f}(\bar{y})| < \varepsilon$ om $j \geq N$, dvs $|\bar{x}_{k_j} - \bar{x}| < \varepsilon$ om $j \geq N$. $\therefore \bar{x}_{k_j} \to \bar{x}$, $j \to \infty$.



(c) $m = 1$, $f(\bar{x}) = 0$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n = D$ till exempel.

(3) Kandidater är de stationära punkterna:

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 2y = 0 & (1) \\ f'_y = -2x + 4y + 3y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow 2y + 3y^2 = 0$

$y(3y+2) = 0 \Rightarrow y = 0$ eller $x = -\frac{2}{3}$

$(1) \Rightarrow x = y$, så våra stationära punkter är $(0,0)$ och $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$

Vi kontrollerar kvadratiska formen i dessa punkter.

$$\begin{cases} f''_{xx} = 2 \\ f''_{yy} = 4 + 6y \\ f''_{xy} = -2 \end{cases}$$

$Q_{(0,0)} = 2 \cdot h^2 + 4k^2 + (-2) \cdot 2hk$

$= 2(h-k)^2 + 2k^2 \geq 0$ och

om $= 0$ så $k = 0 = h - k$, dvs $h = k = 0$

$\therefore Q_{(0,0)}$ är positivt definit $\Rightarrow f$ har lokalt min. här.

$Q_{(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3})} = 2h^2 + 0\cdot k^2 - 2\cdot 2hk = 2(h-k)^2 - 2k^2$

$Q(1,0) = 2 > 0$ och $Q(1,1) = -2 < 0$.

$\therefore Q_{(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})}$ är indefinit, så f har ingen lokal extrempunkt i $(0,0)$.

Svar: f har ett lokalt min. i origo, och inget lokalt max.

(4) (a) g är likformigt kontinuerlig om för varje $\varepsilon > 0$ finnes $\delta > 0$ så att $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| < \varepsilon$ för alla $\bar{x}, \bar{y} \in D$ sådana att $|\bar{x} - \bar{y}| < \delta$.

(b) Sätt $F(t) := \int_0^1 f(t,x)\,dx$.

Vi har

integralens linjaritet

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} \overset{\downarrow}{=} \int_0^1 \frac{f(t+h,x) - f(t,x)}{h}\,dx$$

$= \int_0^1 f'_t(t+\theta h, x)\,dx$ där $0 \le \theta = \theta(x,t,h) \le 1$,

enligt medelvärdessatsen, då f'_t är kontinuerlig.

Då f'_t är kontinuerlig och D är kompakt, så är f'_t likformigt kontinuerlig på kvadraten D enligt sats.

Så i givet $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ så att

$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| < \varepsilon$ om $|\bar{x} - \bar{y}| < \delta$, $\bar{x}, \bar{y} \in D$.

Om $|h| < \delta$, så är $|(t+\theta h, x) - (t,x)| = |(\theta h, 0)| < \delta$, och därmed

$$\left|\int_0^1 f'_t(t+\theta h, x)\,dx - \int_0^1 f'_t(t,x)\,dx\right| \le$$
$$\int_0^1 |f'_t(t+\theta h, x) - f'_t(t,x)|\,dx < \int_0^1 \varepsilon\,dx = \varepsilon$$

Detta visar att

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} - \int_0^1 f'_t(t,x)\,dx \to 0, \text{ då } h \to 0,$$

dvs $F'(t) = \int_0^1 f'_t(t,x)\,dx$.

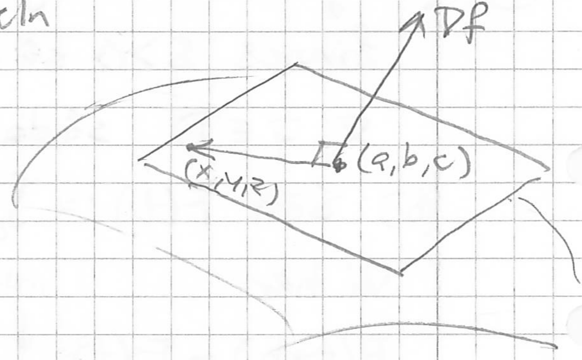
(5) Låt $f(x,y,z) = x^2+y^2+3xy+2-z^2$, så att vi betraktar nivåytan $f=0$.

$\nabla f = (2x+3y,\ 2y+3x\ ,\ -2z)$

Tangentplanet till $f=0$ i en punkt (a,b,c) har ekvation

$$(2a+3b)(x-a)+(2b+3a)(y-b)-2c(z-c)=0$$

Detta är parallellt med x-axeln om $2a+3b=0$.



Det innehåller $(17,0,2)$ om

$$(2b+3a)(-b)-2c(2-c)=0$$

Vi får ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 2a+3b=0 & (1)\\ b(2b+3a)+2c(2-c)=0 & (2)\\ a^2+b^2+3ab+2-c^2=0 & (3)\end{cases}$$

$(1) \Rightarrow 3b=-2a$

$2\cdot(3)-(2) \Rightarrow 2a^2+3ab+4-4c=0$

$\Rightarrow 0+4-4c=0 \Rightarrow c=1$

(1) i $(3) \Rightarrow \left(-\frac{3b}{2}\right)^2+b^2+3\cdot\left(-\frac{3b}{2}\right)b+1=0$

$-\frac{5b^2}{4}+1=0 \Rightarrow b=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

<u>Svar</u>: $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 1\right)$ och $\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 1\right)$

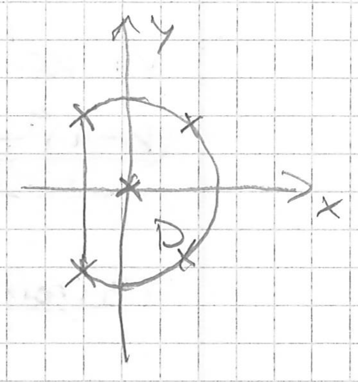
(6) D är kompakt och f är kontinuerlig, så f antar max och min-värde på D. Då D är sammanhängande antar f alla mellanliggande värden också, så $f(D)$ är ett kompakt intervall.

Kandidatjakt:

Inre punkter: $f'_x = 2x+6y=0$

$f'_y = 6x+2y=0$ $\Rightarrow x=y=0$

Kandidat $f(0,0)=0$



Randkurvan $\underbrace{x^2+y^2}_{=:g(x,y)} = 5$:

$\nabla f \,/\!/\, \nabla g \iff$

$$\begin{vmatrix} 2x+6y & 2x \\ 6x+2y & 2y \end{vmatrix} = 0$$

$\iff (x+3y)y = (3x+y)x$

$3y^2 = 3x^2 \iff x = \pm y$

Då $x^2+y^2=5$ och $x > -1$ krävs, fås kandidater

$f\left(\sqrt{\tfrac{5}{2}}, \sqrt{\tfrac{5}{2}}\right) = \frac{5}{2} + 6\cdot\frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 4\cdot 5 = 20$

$f\left(\sqrt{\tfrac{5}{2}}, -\sqrt{\tfrac{5}{2}}\right) = \frac{5}{2} - 6\frac{5}{2} + \frac{5}{2} = -10$

Randkurvan $x=-1$:

$f(-1,y) = 1 - 6y + y^2 =: h(y)$

$h'(y) = -6 + 2y = 0 \Rightarrow y = 3.$

Då $(-1)^2 + 3^2 > 5$ fås ingen kandidat.

Hörnpunkter

$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow y = \pm 2$

$f(-1,2) = 1 - 12 + 4 = -7$

$f(-1,-2) = 1 + 12 + 4 = 17$

Jämförelse av de 5 kandidaterna ger

max 20 i $\left(\sqrt{\tfrac{5}{2}}, \sqrt{\tfrac{5}{2}}\right)$ och min -10 i $\left(\sqrt{\tfrac{5}{2}}, -\sqrt{\tfrac{5}{2}}\right)$

Svar: $f(D) = [-10, 20]$

(7) (a) f diff.bar i (a,b) betyder att det finns $A,B \in \mathbb{R}$ så att

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

(b) Om f är diff.bar måste $A = f'_x(0,0)$ och $B = f'_y(0,0)$ enligt sats.

$f(h,0) = \frac{h^4+h^3}{h^2} = h^2 + h \Rightarrow f'_x(0,0) = 1$

$f(0,k) = \frac{k^4}{k^2} = k^2 \Rightarrow f'_y(0,0) = 0$

Vi kontrollerar tvåvariabelgränsvärdet i (a):

$$\frac{\frac{(h-k)^4+h^3+hk^2}{h^2+k^2}-0-1\cdot h-0\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}= \Big/ \begin{matrix} h=r\cos\theta \\ k=r\sin\theta \end{matrix} \Big/$$

$$\frac{r^2(\cos\theta-\sin\theta)^4+r\cos^3\theta+r\cos\theta\sin^2\theta-r\cos\theta}{r}$$

$$= r(\cos\theta-\sin\theta)^4 \longrightarrow 0,\ r\to 0 \quad \text{oberoende av } \theta$$

$\uparrow \cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

$\therefore$ f är differentierbar i (0,0).