MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Flervariabelanalys, del 1, MMG300
2019-06-12, kl. 14.00-18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Examinator: Andreas Rosén
Telefonvakt: Filip Wikman, ankn. 5325

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 18 poäng krävs för betyget VG. Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.
Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

---

1. Avgör om följande mängder är öppna, slutna, kompakta respektive sammanhängande.

   (a) $D_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 \leq 1, x + y \neq 0\}$ (2p)

   (b) $D_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ 0 \leq x + y \leq 1, y \geq 0, x < 2\}$ (2p)

2. Som bekant visar Taylors formel för en envariabelfunktion $F(t)$ av klass C^{k+1} att (4p)

$$F(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{F^{(j)}(0)}{j!} t^j + \frac{F^{(k+1)}(\theta t)}{(k+1)!} t^{k+1}, \qquad 0 \leq \theta \leq 1.$$

   Formulera och bevisa Taylors formel, av ordning $k = 2$, för en tvåvariabelfunktion $f(x,y)$. En tydlig formulering samt uppskattning av resttermen krävs.

3. Bestäm alla plan som tangerar ytan $x^4 + y^2 - z^2 = 1$ och som är parallella med planet $2x + y + z = 1$. (3p)

4. Undersök gränsvärdet (3p)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{(x^2 + y^2)^a}$$

   för alla reella värden på a.

Var god vänd!

5. Bestäm de punkter på kurvan $3x^4 + y^4 = 1$ som ligger närmast respektive längst ifrån origo. (3p)

6. (a) Visa att varje reell talföljd har en monoton delföljd. (3p)

   (b) Ange en monoton delföljd till $(k\cos(\pi k))_{k=1}^{\infty}$. (1p)

7. Bestäm en funktion $z(x, y)$ som löser differentialekvationen (4p)

$$xz''_{xy} - yz''_{yy} - z'_y = 1$$

för $x > y > 0$, och som uppfyller randvillkoren $z(x, 0) = 1 + x$ och $z(x, x) = e^x$ för $x \geq 0$.

Ledning: Variabelbytet $u = x$, $v = xy$ kan vara användbart.