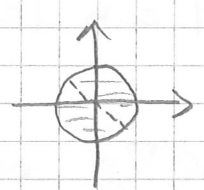
Lösningsförslag MMG300 del 1, 190612

1 (a)



öppen : nej
sluten : nej
kompakt : nej
sammanhängande : nej

(b)

öppen : nej
sluten : ja
kompakt : nej
sammanhängande : ja

OBS: villkoret $x<2$ är redundant.

2 **Taylor:** Antag $f(x,y)$ C^3 i en öppen mängd D innehållande (a,b). Då är

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)\cdot h + f'_y(a,b)\cdot k$$
$$+\frac{1}{2}\left(f''_{xx}(a,b)\,h^2 + 2f''_{xy}(a,b)\,hk + f''_{yy}(a,b)\cdot k^2\right)$$
$$+ (h^2+k^2)^{3/2}B(h,k),$$

där B är en begränsad funktion i en omgivning till $(h,k)=(0,0)$.

Bevis: Sätt

$$F(t) = f(a+th,\, b+tk), \quad 0\le t\le 1.$$

1D Taylor $\Rightarrow$

$$F(t) = F(0) + F'(0)\cdot t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \frac{F'''(\theta t)}{3!}\cdot t^3.$$

Sätt $t=1$ och beräkna derivatorna med kedjeregeln:

$$F(1) = f(a+h,b+k)$$
$$F(0) = f(a,b)$$
$$F'(0) = f'_x(a,b)\cdot h + f'_y(a,b)\cdot k$$
$$F''(0) = f''_{xx}\cdot h^2 + 2f''_{xy}\cdot h\cdot k + f''_{yy}\,k^2$$

$F'''(\theta t)$ är en summa av partiella derivator av f av ordning 3 multiplicerade med tre faktorer h eller k.

$$\Rightarrow |F'''(\theta t)| \le B(h,k)\cdot |(h,k)|^3$$

eftersom tredjederivatorna antages vara kontinuerliga och då $|h| \le |(h,k)|$ och $|k| \le |(h,k)|$ enligt Pytagoras. □ (2)

(3) I sökta tangeringspunkter gäller $\nabla f \parallel \nabla g$, där

$f = x^4+y^2-z^2$ och $g = 2x+y+z$

$\Rightarrow (2x^3, y, -z) = \lambda(2,1,1)$

Insatt i $x^4+y^2-z^2=1$ ger

$(\sqrt[3]{\lambda})^4 + \lambda^2 - \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

Vi får två punkter $(x,y,z) = (1,1,-1)$ och $(-1,-1,1)$.

Tangentplanen blir

$2x+y+z = 2\cdot 1+1-1 = 2$

$2x+y+z = 2(-1)-1+1 = -2$

(4) Längs x-axeln:

$$\frac{x^3+0}{(x^2+0)^a} = x^{3-2a} \longrightarrow \begin{cases} 0, & a < \frac{3}{2} \\ 1, & a = 3/2 \\ \pm\infty, & a > 3/2 \end{cases} \quad \text{då } x \to 0$$

För $a = 3/2$ testar vi gränsvärdet längs $x=y$:

$$\frac{x^3+x^3}{(x^2+x^2)^{3/2}} = \frac{2x^3}{(2x^2)^{3/2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \ne 1$$

Så tvåvariabelgränsvärdet kan ej existera då $a \ge 3/2$.

För $a < 3/2$:

$$\left|\frac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)^a}\right| \le \frac{|x|^3+|y|^3}{r^{2a}} \le \frac{2r^3}{r^{2a}} = 2r^{\overbrace{3-2a}^{>0}} \to 0, \text{ då } r = |(x,y)| \to 0.$$

Enligt instängningsregeln visar detta att

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)^a} = 0 \text{ då } a < 3/2.$$

(5) Låt $f(x,y) = x^2+y^2$ = avstånd till origo^2,

$g(x,y) = 3x^4+y^4$

Vi optimerar f under bivillkoret $g=1$.

g kontinuerlig $\Rightarrow$ $g=1$ är en sluten mängd.

Då $g=1 \Rightarrow 3x^4 \le 1 \Rightarrow x \le 1$

och $y^4 \le 1 \Rightarrow y \le 1$

så är $g=1$ en begränsad mängd

Så $g=1$ är en kompakt mängd, och därmed existerar max och min eftersom f är kontinuerlig.

Kandidater: $\nabla f \parallel \nabla g$ $\iff$

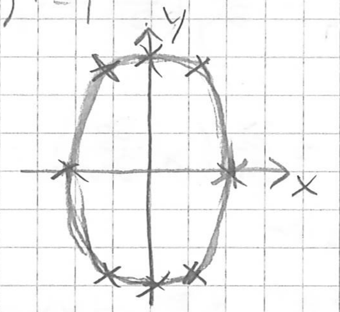
$$\begin{vmatrix} x & 3x^3 \\ y & y^3 \end{vmatrix} = 0 \iff xy(y^2-3x^2)=0$$

Fall 1: $x=0 \Rightarrow y^4=1 \Rightarrow y=\pm 1$

Fall 2: $y=0 \Rightarrow 3x^4=1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

Fall 3: $y=\pm\sqrt{3}x \Rightarrow 3x^4+(\sqrt{3}x)^4=1$

$12x^4=1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$



Vi får kandidater

$f(0,\pm 1)=1$

$f(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, 0) = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$

$f(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{12}}, \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{12}}) = \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{4}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{4}{3}} > 1$

Svar: De fyra punkterna $(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{12}}, \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{12}})$ ligger längst ifrån, och de två punkterna $(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, 0)$ ligger närmast origo.

6 (a) Betrakta en följd $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \in \mathbb{R}$.

Vi kallar en term x_k "låg" om $\forall i>k: x_i \geq x_k$

Fall 1: det finns ändligt många låga termer

Välj index k_1 så att $k<k_1$ för alla låga x_k.

x_{k_1} ej låg $\Rightarrow \exists\, k_2>k_1$ där $x_{k_2}<x_{k_1}$

x_{k_2} ej låg $\Rightarrow \exists\, k_3>k_2$ där $x_{k_3}<x_{k_2}$

o.s.v. Vi får avtagande delföljd $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \ldots$

Fall 2: det finns oändligt många låga termer, säg $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \ldots$

Per definition: $x_{k_2} \geq x_{k_1}$, $x_{k_3} \geq x_{k_2}$, ...

så denna delföljd är växande.

I båda fallen produceras en monoton delföljd.

4

(b) Låt $x_k = k \cdot \cos(\pi k)$.

Om k är jämn: $x_k = k$

$\Rightarrow x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}, \ldots$ är en växande delföljd.

7 Kedjeregeln $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 1 \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + y \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + x \frac{\partial z}{\partial v} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + y\frac{\partial z}{\partial v}\right) = x\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + 1 \cdot \frac{\partial z}{\partial v} + y \cdot x\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$= x z''_{uv} + z'_v + xy z''_{vv}$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial z}{\partial v}\right) = x \cdot x \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) = x^2 \cdot z''_{vv}$$

PDE blir

$$x \cdot (x z''_{uv} + \cancel{z'_v} + \cancel{xy z''_{vv}}) - y(\cancel{x^2 z''_{vv}}) - \cancel{x z'_v} = 1$$

$$z''_{uv} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{u^2}$$

Integration $\Rightarrow z'_u = \frac{v}{u^2} + f(u)$

$$z = -\frac{v}{u} + F(u) + G(v)$$

Allmän lösning: $z(x,y) = -y + F(x) + G(xy)$

Randvillkor:

$$\left.\begin{array}{l} z(x,0) = -0 + F(x) + G(0) = 1 + x \\ z(x,x) = -x + F(x) + G(x^2) = e^x \end{array}\right. , \ x \geq 0$$

$\Rightarrow F(t) = 1 + t - G(0)$

$$G(t) = e^{\sqrt{t}} - F(\sqrt{t}) + \sqrt{t} = e^{\sqrt{t}} - 1 + G(0)$$

$$\Rightarrow z(x,y) = -y + (1 + x - \cancel{G(0)}) + (e^{\sqrt{xy}} - 1 + \cancel{G(0)})$$

$$= \underline{x - y + e^{\sqrt{xy}}}$$