Lösningsförslag MMG300 190822

(1) Se kursboken.

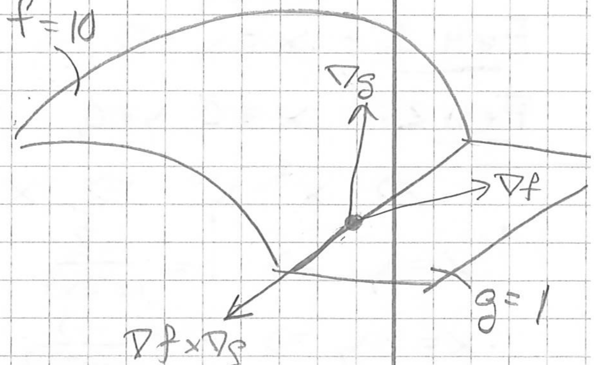
(2) $f = x^2+y^2+2z^2$

$g = x-2y-z$

$\nabla f(1,-1,2) = (2x,2y,4z)\big|_{(1,-1,2)} \parallel (1,-1,4)$

$\nabla g(1,-1,2) = (1,-2,-1)$

$\nabla f, \nabla g$ är normaler till resp. yter. $\Rightarrow \nabla f \times \nabla g$ är tangent till skärningskurva.

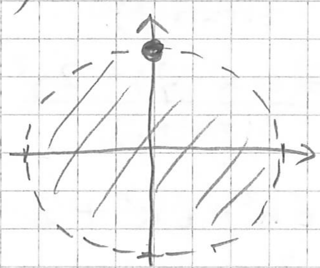


$$\nabla f \times \nabla g \parallel \begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\5\\-1\end{pmatrix}$$

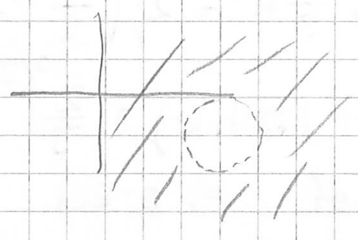
Skärningkurvan tangentlinje har ekvation

$(x,y,z) = (1,-1,2) + t(9,5,-1)$

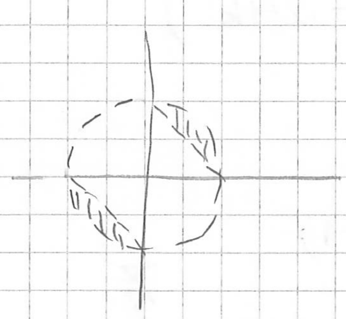
(3) (a) $\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 < 1$



(b) $(x-3)^2+(y+1)^2 \geq 1$



(c)



Svar: öppen: c

sluten: b

kompakt: ingen

sammanhängande: a och b

(4) (a) och (b): se kursboken.

(c) Låt $f(0)=1$ $\Rightarrow$ f är kontinuerlig på kompakt $[0,1]$, så speciellt på delmängden $(0,1]$

(d) $f(x)=\frac{1}{x}$

(5) $f'_x = \frac{6x}{1+x^2+y^2} + 2y = 0$

$f'_y = \frac{6y}{1+x^2+y^2} + 2x = 0$

<u>Fall 1</u>: $x=y=0$

<u>Fall 2</u>: $x\neq 0,\ y\neq 0,\ \Rightarrow \frac{x}{y} = -\frac{3}{1+x^2+y^2} = \frac{y}{x}$

$\Rightarrow x^2=y^2 \Rightarrow x=\pm y$

$x=y \Rightarrow 1=\frac{-3}{1+2x^2}$ $\Rightarrow$ inga lösningar

$x=-y \Rightarrow -1=\frac{-3}{1+2x^2} \Rightarrow x=\pm 1$

Kandidater: $(0,0)$, $(1,-1)$ och $(-1,1)$

$f''_{xx} = \frac{6(1+x^2+y^2)-12x^2}{(1+x^2+y^2)^2}$ $\qquad f''_{xy} = -\frac{12xy}{(1+x^2+y^2)^2}+2$

$f''_{yy} = \frac{6(1+x^2+y^2)-12y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$

$Q_{(0,0)} = 6h^2+6k^2+2\cdot 2hk = 6\left((h+\frac{1}{3}k)^2+\frac{8}{9}k^2\right)$ ++ pos. def. $\Rightarrow$ lok. min

$Q_{(1,-1)} = \frac{2}{3}h^2+\frac{2}{3}k^2+2\cdot\Big(\underbrace{\frac{12}{9}+2}_{10/3}\Big)h\cdot k$

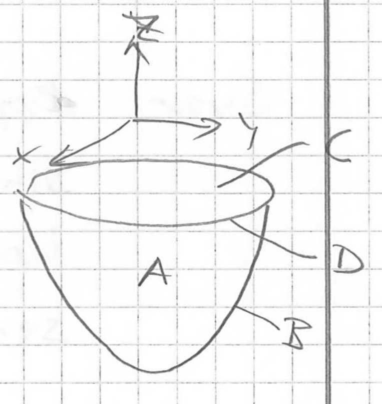
$=\frac{2}{3}(h^2+k^2+10hk) = \frac{2}{3}\left((h+5k)^2-24k^2\right)$

+− indef. $\Rightarrow$ sadel.

$Q_{(-1,1)} = Q_{(1,-1)}$ $\Rightarrow$ sadel i $(-1,1)$

<u>Svar</u>: lok. min i $(0,0)$, sadlar i $\pm(1,-1)$

(6) Området är en avhuggen paraboloid, enligt figur, och kompakt, så max/min existerar.



<u>Inre A</u>: $f'_x = 2x = 0$

$f'_y = z = 0$

$f'_z = y = 0$

$(0,0,0)$ ej i området

③

Ytan B:

$f(x,y,x^2+y^2-12) = x^2 + y(x^2+y^2-12) =: g(x,y)$

$g'_x = 2x(1+y) = 0$

$g'_y = x^2+3y^2-12 = 0$

$x=0 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow z = -8$

Kandidat $(0, \pm 2, -8)$

$y=-1 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow z = -2 > -4$ ej i området.

Ytan C:

$f(x,y,-4) = x^2 - 4y =: h(x,y)$

$h'_x = 2x$

$h'_y = -4$ ingen stationär punkt.

Kurvan D:

$$\begin{vmatrix} 2x & x & 0 \\ z & y & 0 \\ y & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ (linjärt beroende gradienter)

$\Leftrightarrow (2y-z)x = 0$

$x=0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{8}$ då $z=-4$

$\Rightarrow$ kandidater $(0, \pm 2\sqrt{2}, -4)$

$z = 2y$, $z=-4 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow x = \pm 2$

kandidater $(\pm 2, -2, -4)$

Jämförelse:

$f(0, \pm 2, -8) = \mp 16$ ← min & max

$f(0, \pm 2\sqrt{2}, -4) = \mp 8\sqrt{2}$

$f(\pm 2, -2, -4) = 4 + 8 = 12$

Svar: $f_{max} = f(0,-2,-8) = 16$ och

$f_{min} = f(0,2,-8) = -16$.

(7) Låt $g(x,t) = e^{3(x-t)} - e^{-3(x-t)}$.

Enligt teori behövs g och g'_x kontinuerliga, vilket uppenbarligen gäller, för att kunna derivera under integraltecknet. Vi får

$$u'(x) = \frac{1}{6}\int_0^x \left(3e^{3(x-t)} - (-3)e^{-3(x-t)}\right) f(t)\,dt$$

$$+ \frac{1}{6}\Big(\underbrace{e^{3(x-x)} - e^{-3(x-x)}}_{=0}\Big) f(x)\cdot 1$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x \left(e^{3(x-t)} + e^{-3(x-t)}\right) f(t)\,dt.$$

Även g''_x är kontinuerlig, så

$$u''(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \left(3e^{3(x-t)} - 3e^{-3(x-t)}\right) f(t)\,dt$$

$$+ \frac{1}{2}(1+1)f(x)\cdot 1$$

$$= 9u(x) + f(x)$$, vilket skulle visas.