

DUBBELINTEGRAL

Dubbelintegral över allmännare områden:

Antag att $f(x, y)$ är definierad och begränsad på ett *begränsat* område D .

Välj en axelparallell rektangel Δ som innehåller D . Låt $f_D(x, y)$ vara en utvidgning av f till Δ som ges av

$$f_D(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{om } (x, y) \in D \\ 0 & \text{om } (x, y) \notin D \end{cases}$$

Vi säger att f är **integrerbar över** D om f_D är integrerbar över någon rektangel Δ som omfattar D och vi sätter

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f_D(x, y) dx dy$$

Obs! Definitionen är oberoende av valet Δ .

Räkneregler:

1.

$$\iint_D \alpha f dx dy = \alpha \iint_D f dx dy \quad (\alpha \text{ konstant})$$

2.

$$\iint_D (f + g) dx dy = \iint_D f dx dy + \iint_D g dx dy$$

3. $f \leq g$ på $D \Rightarrow \iint_D f dx dy \leq \iint_D g dx dy$

4.

$$\left| \iint_D f dx dy \right| \leq \iint_D |f| dx dy$$

5. $D_1 \cap D_2 = \emptyset \Rightarrow$

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f dx dy = \iint_{D_1} f dx dy + \iint_{D_2} f dx dy$$

Om D inte är en rektangel så blir oftast $f_D(x, y)$ icke kontinuerlig (diskontinuitet på randen) och vi kan inte använda föregående sats direkt. Men om randen är snäll (en nollmängd) har den ingen betydelse.

Nollmängder

Def. 6.4 En mängd N i planet kallas en **nollmängd** om vi för varje $\epsilon > 0$ kan täcka över N med ändligt många axelparallella rektanglar vars sammanlagda area är högst ϵ .

En mängd D kallas **kvadrarbar** om dess rand är en nollmängd.

Unionen av två nollmängder är en nollmängd.

Lemma 6.1 Grafen till en kontinuerlig funktion av en variabel $y = \varphi(x)$ utgör en nollmängd.

Lemma 6.2 Antag att f är likformigt kontinuerlig och begränsad på en kvadrerbar mängd D . Då är f integrerbar över D .

Lemma 6.3 Varje begränsad funktion f är integrerbar över en nollmängd N och

$$\iint_N f dx dy = 0$$

Nollmängder har ingen betydelse

Dubbelintegraler över speciella område.

Ett område D kallas *y-enkelt* om det kan skrivas

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\},$$

där $y = c(x)$, $y = d(x)$ är kontinuerliga kurvor.

Sats 6.4 Om f är kontinuerlig på D så är f integrerbar över D och

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

(Dubbelintegralen beräknas genom upprepad integrering).

Obs! Vi kan byta rollerna av x och y och prata om x -enkla område.

Medelvärde.

Låt f vara kontinuerlig på en kompakt mängd D . Då har f ett största och ett minsta värde M och resp. N . Om D är en sammanhängande mängd antar f alla värde i intervallet $[M, N]$.

Vi har alltså $M \leq f(x, y) \leq N$ och därmed om $\mu(D)$ är arean av D

$$M\mu(D) \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy \leq N\mu(D)$$
$$M \leq \frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x, y) dx dy \leq N.$$

Därför

Medelvärdesatsen. Det finns $(x_0, y_0) \in D$ så att

$$\iint_D f(x, y) dA = f(x_0, y_0) \cdot (\text{arean av } D).$$

$f(x_0, y_0)$ kallas medelvärdet för f på D .