# GENERALISERAD DUBBELINTEGRAL

En dubbelintegral $\iint_D f(x,y)dA$ kallas *generaliserad* om

- $D$ inte är begränsad mängd, eller
- $f$ inte är begränsad på $D$.

**Konvergens för generaliserade dubbelintegraler:**
Man skall, i princip, ta en följd av allt större begränsade delmängder $D_n$ av $D$, $D_{n-1} \subset D_n$, där $f$ är begränsad och $\cup_n D_n = D$. Konvergens innebär då att man får samma gränsvärde då $n \to \infty$ oavsett hur mängderna $D_n$ valts.

Låt $\Omega$ vara ett (öppet) område i planet och låt $f$ vara kontinuerlig i $\Omega$. Antag att $\mathbf{f} \geq \mathbf{0}$ på $\Omega$.
Låt $M$ vara mängden av alla integraler $\iint_D f(x,y)dxdy$, där $D$ är ett begränsad delmängd av $\Omega$ så att $f$ är begränsad i $D$.
**Def.** Vi säger att den generaliserade integralen

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy$$

är **konvergent** om mängden $M$ är uppåt begränsad, och **divergent** om så inte är fallet.
Om integralen är konvergent så sätter vi

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \sup M.$$

Man kan visa att $\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f dxdy$ för godtycklig följd $(D_n)_{n=1}^\infty$, där varje $D_n$ är en begränsad kvadrerbar delmängd av $\Omega$ sådan att $f$ är begränsad på $D_n$, $D_n \subset D_{n+1}$ och varje begränsad kvadrerbar delmängd $D$ av $\Omega$ i vilken $f$ är begränsad ligger i någon av $D_n$.
På liknande sätt definieras konvegens/divergens för en generaliserad integral med negativ integrand $f$.

**Sats.** Om $f$ **inte växlar tecken** i $\Omega$ och $\Omega$ är $y$-enkelt ($\Omega = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$) å gäller följande:
Om

$$\int_a^b \left( \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

är ändligt så är den generaliserade integralen konvergent och

$$\iint_\Omega f(x,y)dA = \int_a^b \left( \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Det är tillåtet att byta variabler i en generaliserad integral.

**Jämförelsekriterium:**

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \le f(x,y) \le g(x,y), (x,y) \in \Omega \\ \iint_\Omega g(x,y)dxdy \text{ är konvergent} \end{array}\right. \Rightarrow \iint_\Omega f(x,y)dxdy \text{ är konvergent}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \le f(x,y) \le g(x,y), (x,y) \in \Omega \\ \iint_\Omega f(x,y)dxdy \text{ är divergent} \end{array}\right. \Rightarrow \iint_\Omega g(x,y)dxdy \text{ är divergent}$$

---

Om $f$ antar både positiva och negativa värde och den generaliserade integralen $\iint_\Omega |f(x,y)|dA$ är konvergent så säger vi att $\iint_\Omega f(x,y)dA$ är konvergent.
Ekvivalent: $\iint_\Omega f(x,y)dxdy$ är konvergent om både integralerna

$$\iint_\Omega f^+ dxdy \text{ och } \iint_\Omega f^- dxdy$$

är konvergenta, där

$$f^+(x,y) = \left\{\begin{array}{ll} f(x,y) & \text{då } f(x,y) \ge 0 \\ 0 & \text{då } f(x,y) \le 0 \end{array}\right.$$

$$f^-(x,y) = \left\{\begin{array}{ll} -f(x,y) & \text{då } f(x,y) \le 0 \\ 0 & \text{då } f(x,y) \ge 0 \end{array}\right.$$

Om $\Omega$ är dessutom $y$-enkelt kan den senare beräknas genom upprepad integrering.

---

TRIPPELINTEGRALER

---

Vi definierar trippelintegraler genom att följa samma mönstret som för dubbelintegraller: vi definierar först trippelintegral av en trappfunktion $f(x,y,z)$ på ett axelparallellt rätblock $\Delta$ genom att sätta

$$\iiint_\Delta f(x,y,z)dxdydz = \sum_{i,j,k} c_{ijk}\mu(\Delta_{ijk}),$$

där $\mu(\Delta_{ijk})$ är volymen av axelparallella delblock $\Delta_{ijk}$: $x_{i-1} \le x \le x_i$, $y_{j-1} \le y \le y_j$, $z_{k-1} \le z \le z_k$ och $f(x,y,z) = c_{ijk}$ för $(x,y,z) \in \Delta_{ijk}$; denna integral utvidgas sedan steg för steg tills man har integraller av formen

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$$

med kontinuerlig $f(x,y,z)$ och (kvadrerbart) område $D \subset \mathbb{R}^3$.

$$\iiint_D dxdydz = \mu(D) = \text{volymen av } D.$$

Generaliserade trippelintegraler införes på motsvarande sätt som generaliserade dubbelintegraler.

**Trippelintegraler över speciella område.**

Om $D$ är en axelparallell rätblock: $D = \{(x,y,z) : a \le x \le b, c \le y \le d, e \le z \le f\}$; så

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left( \int_c^d \left( \int_e^f f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx,$$

($x$, $y$, $z$ får byta rollerna).

Om $D = \{(x,y,z) : \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y), (x,y) \in E\}$, ($E$ är proektionen av $D$ på $xy$-planet) $\alpha$, $\beta$ är kontinuerliga , så

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_E \left( \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy,$$

($x$, $y$, $z$ får byta rollerna).

Om $D = \{(x,y,z) : a \le x \le b, (y,z) \in E_x\}$, ($E_x$ är snittet mellan kroppen $D$ och planet genom $(x,0,0)$ parallelt med $yz$-planet) så

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left( \iint_{E_x} f(x,y,z)dydz \right) dx,$$

($x$, $y$, $z$ får byta rollerna).

---

**Variabelsubstitution**

Antag att $x_1 = g_1(\mathbf{u})$, $x_2 = g_2(\mathbf{u})$, $x_3 = g_3(\mathbf{u})$ är en bijektiv $C^1$-avbildning mellan områdena $E$ i $u_1u_2u_3$-rummet och $D$ i $x_1x_2x_3$-rummet sådan att funktionaldeterminanten $J(\mathbf{u}) = \frac{d(x_1,x_2,x_3)}{d(u_1,u_2,u_3)}$ är skild från noll i $E$.
Om $f(x,y,z)$ är integrerbar på $D$ så är

$$\begin{aligned} &\iiint_D f(\mathbf{x})dx_1dx_2dx_3 \\ &= \iiint_E f(\mathbf{g}(\mathbf{u}))\,|J(\mathbf{u})|\,du_1du_2du_3 \end{aligned}$$

---

Sfärisk (rymdpolär) substitution

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\phi\sin\theta \\ y &= \rho\sin\phi\sin\theta \\ z &= \rho\cos\theta \end{cases}$$

$$dV = dxdydz = \rho^{\mathbf{2}}\sin\theta d\rho d\theta d\phi$$