VEKTORFÄLT

Ett **vektorfält** i planet är en funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = (f(x, y), g(x, y)).$$

Vi uppfattar (x, y) som en punkt i planet och $F(x, y)$ som en vektor i planet. För att åskadligöra vektorfältet väljer vi ett antal punkter (x_i, y_i) och avsätter vektorerna $F(x_i, y_i)$ i respektive punkter.

KURVINTEGRALER

Låt $\mathbf{F}$ vara ett kontinuerligt vektorfält i planet: $\mathbf{F}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ med definitionsmängd D (enöppen mängd). Om $\mathcal{C}$ är en orienterad C^1 kurva i D med parameterframstälningen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$ så kallas uttrycket

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_a^b (f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t))dt$$

för *kurvintegralen av fältet* $\mathbf{F}$ längs kurvan $\mathcal{C}$.
Den betecknas $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ eller $\int_{\mathcal{C}} f dx + g dy$. I det senare fallet talar vi också om *kurvintegralen av differentialformen* $f dx + g dy$.

- Defintionen av kurvintegralen är oberoende av valet av parameter för den (orienterade) kurvan.
- Om $-\gamma$ är kurvan γ genomlupen i omvänd riktning så är

$$\int_{-\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Om $\mathcal{C}$ är styckvis C^1-kurva med C^1 bitar $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n$ definieras kurvintegralen som

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \ldots + \int_{\mathcal{C}_n} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Om kurvan $\mathcal{C}$ är sluten kallas ofta kurvintegralen för cirkulationen av $\mathbf{F}$ runt $\mathcal{C}$ och betecknas $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Den fysikaliska tolkningen av kurvintegralen är det arbete fältet utför (dvs den energi som fältet tillför en partikel) för att förflytta partikeln längs kurvan.

Vi har $\mathbf{r}'(t)dt = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{||\mathbf{r}'(t)||}||\mathbf{r}'(t)||dt = \hat{\mathbf{T}}ds$, där $\hat{\mathbf{T}}$ är enhetstangenten till kurvan, $ds = ||\mathbf{r}'(t)||dt$ är båglängdselementet. Vi har alltså

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}ds.$$

Här kan $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}$ uppfattas som kraftens projektion i vägens riktning.

Låt $\mathbf{u}$ vara ett vektorfält och $\mathbf{N}$ kurvans högernormal av längden 1. Om $\mathbf{u}$ representerar riktning och täthet hos en materieströmning, blir $\int_\gamma \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} ds$ flödet genom kurvan från vänster till höger sida. Vi har för $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$

$$\int_\gamma \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} ds = \int_\gamma -u_2 dx + u_1 dy.$$

GREENS FORMEL

Greens formel knyter ihop kurvintegraler med dubbelintegraler. LåtD vara ett kompakt område i planet och ∂D vara randen till D, den senare kan oftas uppfattas som en sluten kurva i planet. Vi säger att den har positiv orientering om området D ligger till vänster om kurvan.

Sats (Greens formel) Låt P och Q vara två C^1- funtioner definierde i en öppen mängd Ω i planet. Om det kompakta delområdet D av Ω har en rand ∂D som utgöres av en eller flera styckvis C^1-kurvor och som är positivt orienterad så är

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy.$$

Area som kurvintegral:
Antag att C är den positivt orienterade randen till D. Då gäller

$$\oint_C x dy = -\oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \text{Arean av } D.$$

Tvådimensionellt flöde:
Låt D vara ett område med positivt orienterad rand ∂D. Flödet av $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ut ur området D kan beräknas enligt

$$\int_{\partial D} -u_2 dx + u_1 dy = \iint_D \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) dx dy$$
