POTENTIALER OCH EXAKTA DIFFERENTIALFORMER

Ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)$ med definitionsmängd Ω (en öppen mängd) kallas **konservativt** eller ett **potenialfält** om det finns en C^1-funktion $U(x, y)$ definierad på Ω sådan att

$$\text{grad } U = \mathbf{F}(x, y) \text{ för alla } (x, y) \in \Omega.$$

Funktionen U kallas då en **potential** till $\mathbf{F}$.

En differentialformen $Pdx + Qdy$ kallas exakt i Ω om det finns en C^1-funktion $U(x, y)$ definierad på Ω sådan att

$$dU = Pdx + Qdy,$$

dvs

$$(P, Q) = (\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}),$$

och därmed (P, Q) är ett potentialfält.

Sats 9.2 Om F är konservativt med potential U och γ är en styckvis glatt kurva med startpunkt P_0 och slutpunkt P_1 så är

$$\int_C F \cdot d\mathbf{r} = U(P_1) - U(P_0)$$

Sats 9.3 Låt $\mathbf{F} = (P, Q)$ vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen mängd Ω. Om kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot dr$ är oberoende av vägen så har $\mathbf{F}$ en potential i Ω.

Sats 9.4 Antag att fältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ har en potentialfunktion U av klass C^2 i Ω. Då är

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (x, y) \in \Omega.$$

Satsen ger ett **nödvändigt** villkor för att (P, Q) skall vara ett potentialfält.

Låt D vara ett öppet område i planet eller rummet. D kallas *sammanhängande* om det är bågvis sammanhängande, dvs om varje par av punkter P och Q i D kan bindas samman med en kontinuerlig kurva som ligger helt i D.
Ett område D kallas *enkelt sammanhängande* om varje enkel sluten kurva kan kontinuerligt dras samman till en punkt utan att lämna D under sammandragningen.
En kurva för vilken begynnelsepunkt och slutpunkt sammanfaller kallas *sluten*. Om en sluten kurva för övrigt inte skär själv kallas den *enkel*.

Sats 9.4 Om vektorfältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ uppfyller villkoret

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ i } \Omega$$

och Ω är enkelt sammanhängande öppen delmängd av palnet så har $\mathbf{F}$ en potential i Ω.
