Divergens:
Om $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ så definieras gradienten genom

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e_2} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e_3}.$$

Man kan tänka sig om linjär avbildning

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e_1} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e_2} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e_3}$$

som verkar på f.

Den kan verka även på ett vektorfält:
om $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = F_1\mathbf{e_1} + F_2\mathbf{e_2} + F_3\mathbf{e_3}$ så är

$$\text{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} = (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e_1}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e_2}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e_3})\cdot(F_1\mathbf{e_1}+F_2\mathbf{e_2}+F_3\mathbf{e_3}) = \frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}$$

div$\mathbf{F}$ kallas divergens av $\mathbf{F}$.

Sats 10.1 (Gauss's sats, divergenssats) Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett C^1-fält definierat i en öppen mängd i rummet. Om det kompakta området $K \subset \Omega$ har en rand ∂K som består av en eller flear C^1-ytor och som orienterdae med utåtriktad normal så gäller att

$$\iiint_K \text{div}\mathbf{F}dV = \iint_{\partial K} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}dS$$

Gauss' sats säger att flödet av $\mathbf{u}$ ut ur området K är lika med volymintegralen av div $\mathbf{u}$ över K.

Divergensen som källstyrka:
Låt B_ϵ vara ett klott med radie ϵ och medelpunkt P och låt S_ϵ vara randen till B_ϵ. Då gäller enligt divergenssatsen:

$$\iiint_{B_\epsilon} \text{div}\mathbf{F}dV = \iint_{S_\epsilon} \mathbf{F}\cdot\hat{N}dS,$$

där $\hat{N}$ är utåtriktad enhetsnormal till sfären S_ϵ och alltså

$$\text{div}\mathbf{F}(P) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{3}{4\pi\epsilon^3}\iint_{S_\epsilon}\mathbf{F}\cdot\hat{N}dS.$$

Ytintegralen kan ses som "flödet ut ur punkten P", div$\mathbf{F}(P)$ kan tolkas som "källstyrka per volymenhet".

Rotation:
Om $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ så definieras **rotation** rot$\mathbf{F}$ enligt

$$\begin{aligned}
\text{rot}\mathbf{F} &= \nabla\times\mathbf{F} = (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e_1} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e_2} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e_3}) \times (F_1\mathbf{e_1} + F_2\mathbf{e_2} + F_3\mathbf{e_3}) \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{e_1} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{e_2} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{e_3}.
\end{aligned}$$

Låt Y vara en orienterad C^1-ytan med parametrisering $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s,t)$, $(s,t) \in D$, där D är en kompakt delmängd av st-planet med positivt orienterad C^1 rand ∂D. Vi ska definiera **randen** ∂Y av Y som bilden av kurvan ∂D med tillhörande orientering. Vi talar om orienterad ytstycke med orienterad rand.

Stokes sats. Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett C^1-fält definierat i en öppen mängd Ω i rummet. Om Y är ett orienterat ytstycke i Ω med orienterad rand ∂Y så gäller att

$$\oint_{\partial Y} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y (\mathrm{rot}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{N} dS$$

där $\mathbf{N}$ ehnetsnormalvektorfält som ger positiv orientering av Y.

Tolkning av rotationen:

Låt S_ϵ vara en cirkelskiva med radie ϵ och centrum i punkten P och enhetsnormalvektor $\mathbf{N}$. Låt C_ϵ vara randcirkeln genomlöpt motursett från spetsen av $\mathbf{N}$. Då gäller enligt Stokes sats

$$\oint_{C_\epsilon} \mathbf{F} \cdot dr = \iint_{S_\epsilon} (\mathrm{rot}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS \approx (\mathrm{rot}\mathbf{F})(P) \cdot \mathbf{N} \pi \epsilon^2$$

och alltså

$$\mathrm{rot}\mathbf{F}(P) \cdot \mathbf{N} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \oint_{C_\epsilon} \mathbf{F} \cdot dr.$$

Kurvintegralen kan tolkas som arbetet vektorfältet $\mathbf{F}$ uträttar då en partikel går runt i den cirkulära banan.

$\mathrm{rot}\mathbf{F}(P) \cdot \mathbf{N}$ kan alltså ses som fältets förmåga att få en partikel att rotera kring axeln $\mathbf{N}$, förmågan är störst om $\mathbf{N}$ är parallell med $\mathrm{rot}\mathbf{F}(P)$ och obefintlig om de är ortogonala.

Ett vektorfält i rummet $F(x,y,z) = (f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z))$ med definitionsmängd D kallas **konservativt** (eller **potentialfält**) om det finns en funktion $\phi(x,y,z)$ definierad på D sådan att

$$\mathrm{grad}\ \phi(x,y,z) = F(x,y,z) \text{ för alla } (x,y,z) \in D.$$

Funktionen $\phi(x,y,z)$ kallas en **potential** till $F(x,y,z)$.

Om D är bågvis sammanhängande område så blir ϕ entydigt bestämd upp till en konstant.

För potentailfält gäller samma formeln

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = \phi(b) - \phi(a)$$

där a och b är begynnelse- och respektive slutpunkt på kurvan γ.

Man säger att en differentialform $u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3$ är exakt om $d\phi = u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3$ för någon funktion ϕ.

Sats 10.3 Varje potentialfält är virvelfritt.

Satsa 10.4 Om $\mathbf{F}$ är virvelfritt i ett **enkelt sammanhängande område** D så är $\mathbf{F}$ konservativt i D.