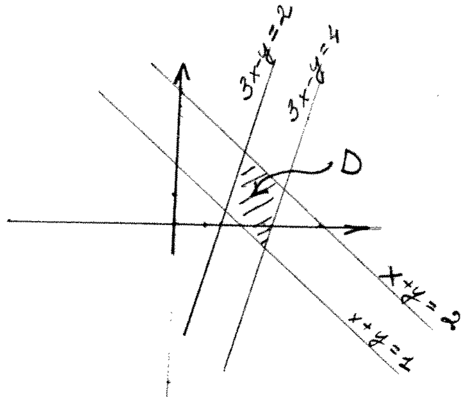
1. PB: Definition 9.4.2, Sats 9.4.2
2. PB: Sats 6.1.3
3. GZO: Sats 3.1

4.




Följande variabelbyte är lämpligt:

$\begin{cases} u = x+y \\ v = 3x-y \end{cases}$

E: $1 \le u \le 2$
$2 \le v \le 4$

$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$

varav $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{4}$

$$\iint_D (x+y)\,dxdy = \iint_E u \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \frac{1}{4}\int_1^2\left(\int_2^4 u\,dv\right)du = \frac{3}{4}$$

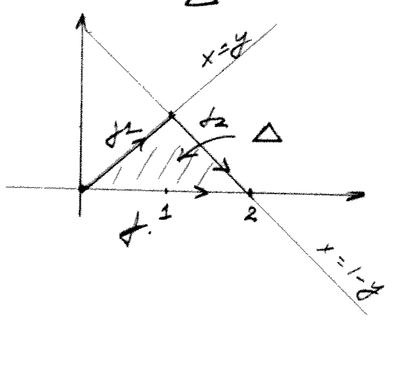
5. Vi har här att, för $a_n = \frac{n}{1-n^2}$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{n^2+2n}\cdot\frac{1-n^2}{n} \to 1$, när $n \to \infty$

Då måste $|a_n|^{1/n} \to 1$ och konvergensradien är $R = \frac{1}{1} = 1$.
Serien konvergerar absolut när $|x-2| < 1$
När $x = 1$ får vi den alternerande serien $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1-n^2}$ med termer som avtar mot 0 och därför är konvergent
När $x = 3$ får vi $-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1}$
Eftersom $\frac{n}{n^2-1} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ och $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent
är potensserien divergent när $x = 3$

Svar: $x \in [1, 3)$.

6. (a) Enligt Greens formel

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_\Delta \frac{\partial(2x - e^{y^2} + y)}{\partial x} - \frac{\partial(\sin x + 3y^2 + x^5)}{\partial y}\,dxdy =$$




$$= \iint_\Delta (2-6y)\,dxdy =$$

$$= \int_0^1\left(\int_y^{1-y}(2-6y)\,dx\right)dy =$$

$$= \int_0^1 (2-6y)(1-2y)\,dy = 1$$

(b) Låt $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ vara kurvorna som på bilden
Från (a) följer att $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = 1$

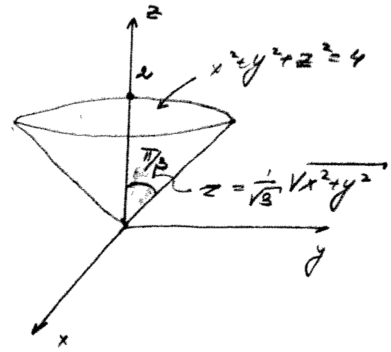
och $\int_{\gamma} \mathbb{F}\cdot dr \neq \int_{\gamma_1+\gamma_2} \mathbb{F}\cdot dr$

medan både $\gamma$ och $\gamma_1+\gamma_2$ är styckvis $C^1$-kurvor med begynnelsepunkt $(2,0)$ och slutpunkt $(2,0)$

7. Vi använder Gauss sats

$$\oiint_{\partial K} \mathbb{F}\cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{inåt} \\ \text{riktad}}}{\hat{N}}\, dS = -\oiint_{\partial K} \mathbb{F}\cdot(-\hat{N})\, dS = -\iiint_K \operatorname{div}\mathbb{F}\, dV =$$

$$= -\iiint_K (-y^2+2z^2-3z^2-x^2)\,dV = \iiint_K (x^2+y^2+z^2)\,dV$$




Sfäriska koord är lämpliga

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi & 0\le R\le 2 \\ y = R\sin\theta\sin\varphi & 0\le\varphi\le 2\pi \\ z = R\cos\theta & 0\le\theta\le\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\iiint_K (x^2+y^2+z^2)\,dV = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/3}\left(\int_0^2 R^2 R^2\sin\theta\, dR\right)d\theta\right)d\varphi$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi/3}\sin\theta\, d\theta \int_0^2 R^4\, dR = \frac{32\pi}{5}$$

8. Man ser lätt med jämförelsekriteriet och den geometriska summan $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}$ att serien konvergerar.

För att hitta summan sätter vi

$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(3k+1)^{-1}x^{3k+1}$ Vi får då att summan $= 3^{\frac{1}{3}}S(3^{-1/3})$

Vi ser att $S(0)=0$ och $S'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{3k} = \frac{1}{1-x^3}$, när $|x|<1$.

Integration ger

$$S(x) = \int\frac{1}{1-x^3}dx = \int\frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)}dx = \int\frac{1}{3}\left(\frac{x+2}{1+x+x^2}\right)+\frac{1}{3}\frac{1}{1-x}\,dx$$

$$= \ldots = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{x^2+x+1}{(1-x)^2}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+C$$

Från $S(0)=0$ ser vi att

$$C = -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}$$

så

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)3^k} = \sqrt[3]{3}\,S\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) = \sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{6}\ln\left(\frac{1-x^3}{(1-x)^3}\right)\Bigg|_{x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{2}\right)\right)-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{6}\ln\frac{2}{(\sqrt[3]{3}-1)^3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{2}\right)\right)-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right)$$