# Cauchy-Schwarz olikhet för Hermitiska former.

1. Det heter också Cauchy-Bunyakovski-Schwarz olikhet.

2. Bevis och formulering.

Under föreläsningen 2016-09-27 bevisade vi följande:

(A) I fall $\mathbb{R}$ gäller $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

(B) I fall $\mathbb{C}$ (Hermitiska former, huvudskillnad från $\mathbb{R}$-fallet är $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$) bevisade vi $|\operatorname{Re}\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Här $\operatorname{Re}(a+bi) = a$.

(C) I själva verket gäller $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ i det Hermitiska fallet också.

Övning. Fundera varför är (C) starkare än (B).

Bevis för $\mathbb{C}$.

§1) $t \in \mathbb{R}$ är variabel.

$\langle x - ty, x - ty \rangle \geq 0$ gäller för alla vektorer $x, y$ och alla $t \in \mathbb{R}$

$$\Updownarrow$$

$$\langle x,x \rangle + t^2 \langle y,y \rangle - t(\langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle) \geq 0$$

$\Updownarrow$ i fall $\langle x,y \rangle \in \mathbb{R}$

$$\langle x,x \rangle + t^2 \langle y,y \rangle - 2t \langle x,y \rangle \geq 0,$$

ty $\langle y,x \rangle = \overline{\langle x,y \rangle} = \langle x,y \rangle$.

I detta fall fortsätter beviset på samma sätt som i kompendiet och på föreläsningen.

§2) Nu måste vi bevisa olikheten i fall $\langle x,y \rangle \in \mathbb{C}$, dvs $\langle x,y \rangle = a + bi$.

Genom att använda polära koordinater, kan vi skriva $a+bi = r \cdot e^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}$ och $\theta \in \mathbb{R}$.

Observera att $|a+bi| = r$, $|e^{i\theta}| = 1$.

Vidare: $\langle x, e^{i\theta} y \rangle = e^{-i\theta} \langle x,y \rangle$ (kolla det!)

och $e^{-i\theta} \langle x,y \rangle = e^{-i\theta} r \cdot e^{i\theta} = r \in \mathbb{R} \Rightarrow$

(*) $|\langle x, e^{i\theta} y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|e^{i\theta} y\|$, se punkt 1 ovanför!

Nu ska vi analysera

$|\langle x, e^{i\theta}y\rangle|$ och $\|e^{i\theta}y\|$:

$$|\langle x, e^{i\theta}y\rangle| = |e^{-i\theta}| \cdot |\langle x,y\rangle|$$
$$= |\langle x,y\rangle|, \text{ ty } |e^{-i\theta}| = 1;$$

$$\|e^{i\theta}y\| = |e^{i\theta}| \cdot \|y\| = \|y\|.$$

Nu skriver vi om $(*)$:

$$\begin{array}{ccc} |\langle x, e^{i\theta}y\rangle| & \leq & \|x\| \cdot \|e^{i\theta}y\| \\ \| & & \| \\ |\langle x,y\rangle| & & \|x\| \cdot \|y\| \end{array}$$

CS olikheten är bevisat för Hermitiska former!