Föreläsningsanteckningar, Linjär algebra II

Hasse Carlsson

Version 2013

Inledning

Syftet med linjär algebra är att studera vektorrum och linjära avbildningar mellan vektorrum. . . . (Här skall det stå något KLOKT.)

Kursen Linjär algebra II är en fortsättningskurs och utgår från kunskaper i linjär algebra motsvarande följande kapitel i

David Lay, *Linear algebra and its applications*:
Kapitel 1; Kapitel 2, $1-3&8-9; Kapitel 3, $1-2;
Kapitel 5, $1-4; Kapitel 6 , $1

Detta kommer att refereras till som ***Första kursen***.

Innehåll

Kapitel 1

Vektorrum

1.1 Definition av vektorrum

I ***Första kursen*** har ni stött på exempel på olika vektorrum; geometriska vektorer (i planet eller det tredimensionella rummet), $\mathbb{R}^n$, delrum till $\mathbb{R}^n$, och kanske också $\mathbb{C}^n$.

I alla dessa exempel kan vi addera två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ och få en ny vektor $\mathbf{u}+\mathbf{v}$. Vi kan också multiplicera en vektor $\mathbf{u}$ med en skalär λ och få en ny vektor $\lambda\mathbf{u}$. Dessa operationer uppfyller vissa räkneregler (se nedan) och sammanfattas i följande definition av (ett abstrakt) vektorrum.

Låt V vara en icketom mängd och $\mathbb{K}$ en kropp. (Om du inte vet vad en kropp är behöver du inte vara orolig, $\mathbb{K}$ är antingen $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ i den här kursen.) En ***addition*** på V är en funktion $V \times V \to V$ som till två element $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ordnar ett nytt element $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in V$. En ***multiplikation med skalärer*** på V är en funktion $\mathbb{K} \times V \to V$ som till $\lambda \in \mathbb{K}$ och $\mathbf{u} \in V$ ordnar ett element $\lambda\mathbf{u} \in V$.

Definition 1.1. *Ett **vektorrum** är en icketom mängd V med en addition och en multiplikation med skalärer som uppfyller vektorrumsaxiomen*

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$ *(kommutativitet)*
2. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ *(associativitet)*
3. *Det finns en vektor* $\mathbf{0}$ *så att* *(nollvektorn)*
   $\mathbf{v}+\mathbf{0} = \mathbf{v}$ *för alla* $\mathbf{v} \in V$.
4. *Till varje vektor* $\mathbf{v} \in V$ *finns en* *(additiv invers)*
   vektor $\mathbf{w} \in V$ *så att* $\mathbf{w}+\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

5. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ *(multiplikativt enhetselement)*

6. $(\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$ *(associativitet)*

7. $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$ *(distributivitet)*

8. $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$ *(distributivitet)*

Multiplikationen i vektorrummet beror på kroppen $\mathbb{K}$. När vi behöver precisera detta säger vi att vi har ett vektorrum över kroppen $\mathbb{K}$. Ett vektorrum över $\mathbb{R}$ kallas också för ett ***reellt vektorrum*** och ett vektorrum över $\mathbb{C}$ kallas ett ***komplext vektorrum***.

Det är lätt att se att nollvektorn är entydigt bestämd. För om $\mathbf{0}$ och $\mathbf{0}'$ är två nollvektorer så gäller

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}' \,.$$

På liknande sätt gäller att om $\mathbf{w}$ och $\mathbf{w}'$ båda är inverser till $\mathbf{v}$ så är

$$\mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{0} = \mathbf{w} + (\mathbf{w}' + \mathbf{v}) = \mathbf{w} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}') = (\mathbf{w} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}' = \mathbf{0} + \mathbf{w}' = \mathbf{w}' \,,$$

så inversen är också entydigt bestämd och betecknas $-\mathbf{v}$. Entydigheten gör att vi kan definiera $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

Övning 1.1. Visa följande:

(a) $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(b) $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(c) $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$.

Exempel 1.2.

Gamla bekanta?

1. Geometriska vektorer
2. $\mathbb{R}^n$ och delrum till $\mathbb{R}^n$
3. $\mathbb{C}^n$ och delrum till $\mathbb{C}^n$
4. $M_{nm} = \{\text{Alla } n \times m \text{ matriser}\}$

Följdrum

5. $c = \mathbb{R}^\infty = \{\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots); r_i \in \mathbb{R}\}$
6. $c_0 = \mathbb{R}^\infty_0 = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^\infty; r_i \to 0, i \to \infty\}$
7. $c_{00} = \mathbb{R}^\infty_{00} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^\infty; r_i = 0 \text{ utom för ändligt många } i\}$
8. $\ell^2 = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^\infty; \sum_1^\infty |r_i|^2 < \infty\}$

Funktionsrum

9. $\mathbb{R}_2[t] = \mathbb{P}_2 = \{a + bt + ct^2; a, b, c \in \mathbb{R}\}$
10. $\mathbb{C}[t] = \mathbb{P}_{\mathbb{C}} = \{$Alla polynom med komplexa koefficienter$\}$
11. $C[0, 1] = \{$Alla kontinuerliga funktioner på $[0, 1]\}$
12. $C^\infty(\mathbb{R}) = \{$Alla oändligt deriverbara funktioner på $\mathbb{R}\}$
13. $C^k([0, \infty)) =$
    $\{$Alla k gånger kontinuerligt deriverbara funktioner på $[0, \infty)\}$
14. $L^2(I) = \{$Alla integrerbara funktioner på I med $\int_I |f(x)|^2 dx < \infty\}$

Övning 1.2. Verifiera att dessa exempel är vektorrum. Vad är $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\lambda\mathbf{u}$?

1.2 Delrum

Definition 1.3. *En icketom delmängd U till ett vektorrum V kallas ett* ***delrum*** *till V om U också är ett vektorrum (med avseende på samma addition och multiplikation med skalärer som på V).*

För att kontrollera att en mängd U är ett delrum skall vi visa att vektorrumsaxiomen är uppfyllda. För detta räcker det att visa att U är slutet under addition och multiplikation med skalärer, dvs. om $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ och $\lambda \in \mathbb{K}$ så gäller $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$ och $\lambda\mathbf{u} \in U$. Axiomen 1,2 och 5-8 gäller för alla vektorer i V och alltså speciellt för vektorer i U. Axiomen 3 och 4 följer från Övning 1 eftersom $\mathbf{0} = 0\mathbf{u} \in U$ och $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u} \in U$.

Exempel 1.4.

1. Mängden $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3; x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ är ett delrum till $\mathbb{R}^3$ men inte $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3; x_1 + 2x_2 - x_3 = 5\}$.
2. Alla symmetriska $n \times n$-matriser är ett delrum till M_{nm}.
3. c_{00} är ett delrum till c_0 som i sin tur är ett delrum till c.
4. ℓ^2 är ett delrum till c_0.
5. $\mathbb{R}_2[t]$ är ett delrum till $\mathbb{R}[t]$.
6. $C^\infty[0, \infty]$ är ett delrum till $C^7[0, \infty]$.
7. $C[0, 1]$ är ett delrum till $L^2[0, 1]$.

Definition 1.5. *Låt $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vara vektorer i V och λ_i skalärer. Då kallas*

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n \tag{1.1}$$

för en ***linjärkombination*** *av $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.*

Mer allmänt om W är en oändlig delmängd till V så är $\mathbf{v}$ en linjärkombination av vektorerna i W om det finns ändligt många $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ i W så att (1.1) *gäller.*

*Det rum **som spänns av** W består av alla linjärkombinationer av vektorer i W,*

$$\mathrm{Span}(W) = \{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n ; \mathbf{v}_i \in W, \lambda_i \in \mathbb{K}\} .$$

*Vi säger att W **genererar** eller **spänner** V om $\mathrm{Span}(W) = V$.*

Övning 1.3. Visa att $\mathrm{Span}(W)$ är ett delrum till V.

1.3 Bas och dimension

1.3.1 Baser

Definition 1.6. *En mängd $B = \{\mathbf{b}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ av vektorer i V är en **bas** för V om varje vektor $\mathbf{v} \in V$ entydigt kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna i B.*

Här kan B vara en oändlig mängd. Kom ihåg att en linjärkombination alltid är en ändlig summa.

Om $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ är en ändlig bas kan varje vektor $\mathbf{v} \in V$ entydigt skrivas

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{b}_1 + \ldots + x_n \mathbf{b}_n .$$

Vi låter $[\mathbf{v}]_B = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Talen $x_1, \ldots, x_n$ kallas för ***koordinaterna*** för $\mathbf{v}$ i basen B och $[\mathbf{v}]_B$ för ***koordinatvektorn***. Det är lätt att verifiera att

$$[\mathbf{v} + \mathbf{u}]_B = [\mathbf{v}]_B + [\mathbf{u}]_B \text{ och } [\lambda \mathbf{v}]_B = \lambda [\mathbf{v}]_B .$$

Här är $[\mathbf{v}]_B + [\mathbf{u}]_B$ och $\lambda[\mathbf{v}]_B$ definierade av de vanliga vektorrumsoperationerna på $\mathbb{K}^n$. En bas ger oss alltså möjlighet att räkna i det konkreta vektorrummet $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$ i stället för i det abstrakta vektorrummet V.

Exempel 1.7.
4. En bas för $M_{n \times m}$ ges av de nm matriserna M_{ij} där M_{ij} är matrisen med 1 på plats ij, 0 för övrigt.
7. En bas för c_{00} ges av vektorerna $\mathbf{e}_i$ där $\mathbf{e}_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (ettan står på plats i).
9. En bas för $\mathbb{R}_2[t]$ ges av polynomen 1, t och t^2.
10. En bas för $\mathbb{C}[t]$ ges av $\{1, t, t^2, t^3, \ldots\}$
Det är inte lätt att ange en bas för de övriga rummen $5 - 14$ i Exempel 1.2.

Definition 1.8. *En mängd $A = \{\mathbf{v}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ av vektorer är **linjärt oberoende** om alla ekvationer*

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} , \tag{1.2}$$

med $\mathbf{v}_i \in A$ endast har den triviala lösningen $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Mängden A kan vara oändlig men vi kräver (1.2) bara för ändliga delmängder till A. Villkoret kan också uttryckas som att den enda linjärkombinationen av $\mathbf{0}$ med vektorer i A är den triviala.

Om vektorerna inte är linjärt oberoende kallas de ***linjärt beroende***.

Övning 1.4. Visa att $B = \{\mathbf{b}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ är en bas om och endast om B är linjärt oberoende och B genererar V.

Övning 1.5. Visa att om $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ är linjärt oberoende i V så är $\{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \ldots, \mathbf{v}_{n-1} - \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n\}$ det också.

Övning 1.6. Visa att om $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ spänner V så gör $\{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \ldots, \mathbf{v}_{n-1} - \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n\}$ det också.

Övning 1.7. Antag att $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ är linjärt oberoende i V och $\mathbf{w} \in V$. Visa att om $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}, \ldots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}\}$ är linjärt beroende så $\mathbf{w} \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

Övning 1.8. Låt $U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5; x_1 = 3x_2 \text{ och } x_3 = 7x_4\}$. Bestäm en bas för U.

Övning 1.9. Finns det en bas p_0, p_1, p_2, p_3 för $\mathbb{R}_3[t]$ där inget av polynomen har grad 2? Bevis eller motexempel.

Övning 1.10. Visa att funktionerna e^x, xe^x och e^{2x} är linjärt oberoende i

(a) i $C(\mathbb{R})$.

(b) i $C(I)$ där I är intervall $I \subset \mathbb{R}$ som innehåller origo.

(c) i $C(I)$ där I är ett godtyckligt intervall $I \subset \mathbb{R}$.

(Del (a) följer förstås från (b) som i sin tur följer från (c). Men (a) är enklare att visa än (b) som i sin tur är enklare än (c).)

1.3.2 Dimension

Definition 1.9. *Vektorrummet V är **ändligtdimensionellt** om det finns ändligt många vektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ som genererar V.*

Ett rum som inte är ändligtdimensionellt kallas ***oändligtdimensionellt*** eller sägs ha oändlig dimension.

Anmärkning 1.10. Vektorrummet som bara består av nollvektorn passar inte in definitionen. Vi gör konventionen att $\{\mathbf{0}\}$ är ändligtdimensionellt och har dimensionen 0.

Lemma 1.11. *Om $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ spänner V så finns det en delmängd av dessa $\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2} \ldots, \mathbf{v}_{k_l}$ som är en bas för V.*

Bevis. Vi kan anta att ingen vektor $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$. Låt $B_1 = \{\mathbf{v}_1\}$. För $i = 2, 3, \ldots, n$ låter vi $B_i = B_{i-1} \cup \{\mathbf{v}_i\}$ om $\mathbf{v}_i \notin \mathrm{Span}(B_{i-1})$, annars sätter vi $B_i = B_{i-1}$. Det är lätt att med induktion se att B_i är linjärt oberoende och att $\mathrm{Span}(B_i) = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i\}$.

Med $i = n$ ger detta att B_n är linjärt oberoende och spänner V och alltså är B_n en bas. (Jämför Övning 1.4.) □

En omedelbar följd av detta är

Korollarium 1.12. *Ett ändligtdimensionellt vektorrum har en bas.*

Från teorin för lösningar till linjära ekvationssystem i ***Första kursen*** får vi följande resultat.

Lemma 1.13. *Om* $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ *är en bas för* V *och* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ *är linjärt oberoende så gäller* $m \leq n$.

Bevis. Låt $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ och $[\mathbf{v}]_B$ vara koordinatvektorn till $\mathbf{v}$ i denna bas. Då kan ekvationen

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

skrivas på matrisform

$$A\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \text{ där } A = \Big([\mathbf{v}_1]_B \cdots [\mathbf{v}_m]_B \Big) .$$

($[\mathbf{v}_i]_B$ och λ är kolonnvektorer.) Detta är ett lösbart ekvationssystem med m obekanta och n ekvationer. Så om $m > n$ finns oändligt många lösningar, och $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ är inte linjärt oberoende. Alltså gäller $m \leq n$. $\square$

Bevisen av följande konsekvenser lämnas som en enkel(?) övning.

Korollarium 1.14. *Två baser i ett ändligtdimensionellt vektorrum har lika många element.*

Korollarium 1.15. *Om vektorrummet* V *är ändligtdimensionellt så finns det inte en oändlig mängd av linjärt oberoende vektorer* $\{\mathbf{v}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *i* V.

På grund av Korollarium 1.12 och 1.14 kan vi nu göra följande

Definition 1.16. ***Dimensionen*** *för ett ändligtdimensionellt vektorrum* V *är antalet element i en bas.*

Vi kan också konstruera baser ”nedifrån”.

Lemma 1.17. *Varje linjärt oberoende mängd* $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ *på ett ändligtdimensionellt vektorrum kan utvidgas till en bas för* V.

Bevis. Eftersom V är ändligtdimensionellt spänns V av ändligt många vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Om vi använder Lemma 1.11 på vektorerna $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ får vi en bas för V. Det är klart att, eftersom $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ är linjärt oberoende så ingår $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ i denna bas. $\square$

Bevisen av följande konsekvenser lämnas som övning.

Korollarium 1.18. *Om U är ett delrum till V så gäller* $\dim U \leq \dim V$.

Korollarium 1.19. *Om V är ett vektorrum med dimensionen n och $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ spänner V så är $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en bas för V.*

Korollarium 1.20. *Om* $\dim V = n$ *och $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ är linjärt oberoende så är $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en bas för V.*

Det oändligtdimensionella fallet

Även oändligtdimensionella vektorrum har en bas, och två baser har "lika många" element.

För att bevisa existensen av en bas kan vi resonera ungefär som i beviset i det ändligtdimensionella fallet. Tag en vektor $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$. Om $\mathbf{v}_1$ spänner V är vi klara. Annars tag en vektor $\mathbf{v}_2 \notin \text{Span}(\mathbf{v}_1)$. Om $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = V$ är vi klara. Annars tag en vektor……. I det ändligtdimensionella fallet tar denna process slut efter ett ändligt antal steg. För att vi skall "bli klara" i det oändligtdimensionella fallet behöver vi använda *urvalsaxiomet*.

Två (oändliga) mängder A och B har samma *kardinalitet* (den precisa definitionen av "lika många" element) om det finns en bijektion mellan A och B. Man kan bevisa att två baser för V har samma kardinalitet.

Läs gärna om urvalsaxiomet och kardinaltal på Wikipedia:
http://en.wikipedia.org/wiki/Axiom_of_choice
http://en.wikipedia.org/wiki/Cardinal_number

Övning 1.11. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska.

(a) Varje vektorrum som genereras av en ändlig mängd har en bas;

(b) Varje vektorrum har en ändlig bas;

(c) Ett vektorrum kan ha mer än en bas;

(d) Om ett vektorrum har en ändlig bas så har alla baser lika många element;

(e) $\mathbb{R}_n[t]$ har dimensionen n;

(f) $M_{m\times n}$ har dimensionen $m + n$;

(g) Om vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ genererar vektorrummet V så kan varje vektor i V skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ på precis ett sätt;

(h) Varje delrum till ett ändligtdimensionellt rum är ändligtdimensionellt;

(i) Om $\dim(V) = n$ så har V exakt ett delrum med dimension 0 och exakt ett med dimensionen n.

Övning 1.12. Vilka av följande mängder är vektorrum? Förklara!

(a) Alla kontinuerliga funktioner på $[0,1]$;

(b) Alla polynom på $[-1,1]$ med $p(0)=0$;

(c) Alla polynom på $[-1,1]$ med $p(0)=1$;

(d) Alla ickenegativa funktioner på intervallet $(1,\infty)$;

(e) Alla symmetriska $n\times n$-matriser.

Övning 1.13. Antag att $\dim(V)=n$ och $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ är vektorer i V. Visa att då är $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ linjärt oberoende om och endast om de genererar V.

Övning 1.14. Kan vektorerna $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ vara linjärt oberoende men vektorerna $\mathbf{w}_1=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$ $\mathbf{w}_2=\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$ och $\mathbf{w}_3=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_3$ linjärt beroende?

Övning 1.15. Antag att U är ett delrum till det ändligtdimensionella vektorrummet V. Visa att om $\dim U=\dim V$ så är $U=V$.

Övning 1.16. Antag att $p_0,p_1,\ldots,p_m$ är polynom i $\mathbb{P}_m$ så att $p_i(\pi)=0$ för alla i. Visa att $p_0,p_1,\ldots,p_m$ är linjärt beroende.

Övning 1.17. Visa att V är oändligtdimensionellt om och endast om det finns en följd av vektorer $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\ldots$ så att $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ är linjärt oberoende för varje positivt heltal n.

Övning 1.18. Visa att

(a) $\mathbb{R}^\infty$,

(b) $\mathbb{R}^\infty_0$,

(c) $\mathbb{R}^\infty_{00}$

(d) $C[0,1]$

alla är oändligtdimensionella.

Övning 1.19. (a) Låt $U_1,\ldots,U_m$ vara delrum till vektorrummet V. Då definieras summan $U_1+\ldots+U_m$ som alla möjliga summor av element i $U_1,\ldots,U_m$. Mer precist betyder detta att

$$U_1+\ldots+U_m=\{\mathbf{u}_1+\ldots+\mathbf{u}_m;\mathbf{u}_1\in U_1,\ldots,\mathbf{u}_m\in U_m\}\ .$$

Visa att $U_1+\ldots+U_m$ är ett delrum till V.

(b) Om framställningen av en vektor i $U=U_1+\ldots+U_m$ är entydig säger vi att U är en ***direkt summa*** av $U_1,\ldots,U_m$ och skriver

$$U=U_1\oplus\ldots\oplus U_m\ .$$

Visa att $U=U_1\oplus\ldots\oplus U_m$ om och endast om

(i) $U=U_1+\ldots+U_m$
och

(ii) om $\mathbf{u}_1+\ldots+\mathbf{u}_m=\mathbf{0},\ \mathbf{u}_i\in U_i,$ så är $\mathbf{u}_1=\ldots=\mathbf{u}_m=\mathbf{0}$

Övning 1.20. Visa att om V är ett n-dimensionellt vektorrum så finns endimensionella vektorrum U_i med

$$V=U_1\oplus\ldots\oplus U_n\ .$$

Övning 1.21. Antag att $V = U_1 + U_2$. Visa att $V = U_1 \oplus U_2$ om och endast om $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$.

Övning 1.22. Antag att U och V är delrum till $\mathbb{R}^9$ med $\dim U = \dim V = 5$. Visa att $U \cap V \neq \{\mathbf{0}\}$.

Övning 1.23. Antag att U och V är delrum till $\mathbb{C}^8$ med $\dim U = 3$, $\dim V = 5$ och $\dim(U + V) = 8$. Visa att $\mathbb{C}^8 = U \oplus V$.

Övning 1.24. (Svår? För den teoretiskt intresserade.) Antag att V har en uppräknelig bas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \ldots$. Visa att då är varje bas för V uppräknelig.

Förslag till svar

1.8 $(3, 1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 7, 1, 0)$ och $(0, 0, 0, 0, 1)$
1.9. Ja, t.ex. 1, t, $t^2 + t^3$ och t^3
1.11 (a), (c), (d), (h) och (i) är sanna, (b), (e), (f) och (g) falska
1.12 (a), (b) och (e) är vektorrum, (c) och (d) är det inte
1.14 Nej

Kapitel 2

Linjära avbildningar

Från ***Första kursen*** bör du känna till linjära avbildningar $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, deras samband med matriser och matrismultiplikation. Repetera det om du inte känner dig säker på hur det fungerar.

2.1 Definition av linjär avbildning

Definition 2.1. *En **linjär avbildning** mellan två vektorrum V och W över samma kropp $\mathbb{K}$ är en funktion $T : V \to W$ som uppfyller*

$$T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha T\mathbf{u} + \beta T\mathbf{v} \ .$$

En linjär avbildning $T : V \to V$ kallas för en ***linjär operator på*** V och en linjär avbildning $T : V \to \mathbb{K}$ kallas för en ***linjär funktional på*** V.

Exempel 2.2.

1. Nollavbildningen. $O : V \to W$ given av $O\mathbf{v} = \mathbf{0}$ för varje $\mathbf{v} \in V$.
2. Identitetsavbildningen på V. $I = I_V : V \to V$ given av $I\mathbf{v} = \mathbf{v}$ för varje $\mathbf{v} \in V$.
3. En $m \times n$-matris A definierar en linjär avbildning $T = T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ genom $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$.
4. Låt $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ vara en bas på V. Då är $\mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_B$ en linjär avbildning.
5. På $\mathbb{R}^\infty$ definieras framåtskift F och bakåtskift B genom $F(r_1, r_2, r_3, \ldots) = (0, r_1, r_2, r_3, \ldots)$ respektive $B(r_1, r_2, r_3, \ldots) = (r_2, r_3, r_4 \ldots)$.
6. Derivering i funktionsrum, t.ex. avbildningen $Dp = p'$ på $\mathbb{P}_5[t]$
6. Integrering, t.ex. avbildningen $T : C[0, 1] \to \mathbb{R}$ given av $Tf = \int_0^1 f(x)dx$.

Några enkla konsekvenser av definitionen är att om T är en linjär avbildning så gäller $T\mathbf{0} = \mathbf{0}$ och $T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1 T\mathbf{v}_1 + \alpha_2 T\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n T\mathbf{v}_n$.

Till en linjär avbildning hör två viktiga delrum.

Definition 2.3. *Om $T : V \to W$ så definieras **kärnan** eller **nollrummet** till T genom*

$$\operatorname{Ker} T = \{\mathbf{v} \in V; T\mathbf{v} = \mathbf{0}\} .$$

Bildrummet *(eng. range) till T är*

$$\operatorname{Ran} T = \{\mathbf{w} \in W; \mathbf{w} = T\mathbf{v} \text{ för något } \mathbf{v} \in V\} .$$

Övning 2.1. Visa att kärnan och bildrummet till T är delrum till V respektive W.

2.2 Inverterbara linjära avbildningar

Om $T : V \to W$ så gäller $TI_V = T$ och $I_W T = T$ där I_V och I_W är identitetsavbildningarna på V respektive W. Så I fungerar som en etta vid sammansättning av linjära avbildningar.

Definition 2.4.
*1. En linjär avbildning $T : V \to W$ har en **vänsterinvers** om det finns en linjär avbildning $B : W \to V$ så att $BT = I = I_V$.*
*2. En linjär avbildning $T : V \to W$ har en **högerinvers** om det finns en linjär avbildning $C : W \to V$ så att $TC = I = I_W$.*
*3. T är **inverterbar** om den har både en höger och en vänsterinvers.*

Om T har en vänsterinvers B så är T injektiv. Ty om $T\mathbf{x} = T\mathbf{y}$ så $\mathbf{x} = I\mathbf{x} = BT\mathbf{x} = BT\mathbf{y} = I\mathbf{y} = \mathbf{y}$. Om T har en högerinvers C så är T surjektiv. Ty om $\mathbf{y} \in W$ och vi sätter $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$ så gäller $T\mathbf{x} = TC\mathbf{y} = I\mathbf{y} = \mathbf{y}$. Så en inverterbar linjär avbildning $T : V \to W$ är alltså både injektiv och surjektiv.

Användningen av begreppet invers i linjär algebra skiljer sig något från hur det används i analys. I analys säger vi att en injektiv funktion f har en invers som är definierad på bilden av f. Så t.ex. har funktionen e^x inversen $\ln x$ som är definierad på $(0, \infty)$.

Om T är en injektiv linjär avbildning $T : V \to W$ så kan vi betrakta T som en avbildning $T : V \to \operatorname{Ran} T$. Denna avbildning blir en bijektion $T : V \to \operatorname{Ran} T$ som är inverterbar enligt följande sats.

Sats 2.5. *Antag att $T : V \to W$ är linjär, injektiv och surjektiv. Då är T inverterbar.*

Bevis. Eftersom T är en bijektion har ekvationen $T\mathbf{x} = \mathbf{y}$ en entydig lösning för varje $\mathbf{y}$. Låt $\mathbf{x} = T^{-1}\mathbf{y}$ vara denna lösning. Då är T^{-1} en funktionsinvers till T.

Det återstår att visa att T^{-1} är linjär. Låt $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in W$ och $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. Då gäller $T \circ T^{-1}(\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2) = \alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2$. Men eftersom T är linjär gäller också $T \circ (\alpha_1 T^{-1}(\mathbf{y}_1) + \alpha_2 T^{-1}(\mathbf{y}_2)) = \alpha_1 T \circ T^{-1}(\mathbf{y}_1) + \alpha_2 T \circ T^{-1}(\mathbf{y}_2)) = \alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2$. Så $T \circ T^{-1}(\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2) = T \circ (\alpha_1 T^{-1}(\mathbf{y}_1) + \alpha_2 T^{-1}(\mathbf{y}_2))$. Men T är injektiv så $T^{-1}(\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2) = \alpha_1 T^{-1}(\mathbf{y}_1) + \alpha_2 T^{-1}(\mathbf{y}_2)$ och T^{-1} är linjär. $\square$

Övning 2.2. Visa att om $\mathbf{0}$ är den enda vektor som uppfyller $T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ så är T injektiv.

Övning 2.3. Antag att $T : V \to W$ är linjär. Visa att en funktion b med $b \circ T = I$ *inte* behöver vara linjär.

Övning 2.4. Visa att om $T : V \to W$ är injektiv så har T en vänsterinvers.
Ledning? Avbildningen $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ given av $x \mapsto (x, 0)$ har en vänsterinvers B given av $B(x, y) = x$. Funktionen $b(x, y) = x + \sin y$ uppfyller $b \circ T = I$ men b är ingen vänsterinvers eftersom den inte är linjär. ($\tilde{B}(x, y) = x + y$ är också en vänsterinvers.)

Övning 2.5. Antag att $T : V \to W$ är linjär. Visa att en funktion c med $T \circ c = I$ *inte* behöver vara linjär.

Övning 2.6. Antag att $T : V \to W$ är surjektiv. Måste T ha en högerinvers?

Övning 2.7. Visa att det finns två icke inverterbara avbildningar A och B sådana att AB är inverterbar. Kan BA också vara inverterbar?

Vi avslutar detta avsnitt med följande satser.

Sats 2.6. *Om $T : V \to W$ är inverterbar så finns en entydigt bestämd linjär avbildning $T^{-1} : W \to V$ som uppfyller*

$$TT^{-1} = I = I_W \text{ och } T^{-1}T = I = I_V \ .$$

Avbildningen T^{-1} kallas för ***inversen*** till T.

Bevis. Låt B och C vara vänster- respektive högerinverser till T. Då gäller $B = BI = B(TC) = (BT)C = IC = C$. Så vänster- och högerinverserna är entydigt bestämda och identiska och är den sökta inversen. $\square$

Sats 2.7. *Om S och T är inverterbara så gäller*

$$\left(T^{-1}\right)^{-1} = T \text{ och } (ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1} \ .$$

Bevis. Övning. $\square$

2.3 Isomorfa vektorrum

I det här avsnittet låter vi att alla vektorrum vara reella men allt fungerar lika bra för komplexa vektorrum.

Definition 2.8. *En inverterbar linjär avbildning $T : V \to W$ kallas för en* ***isomorfism****.*

Två vektorrum V och W är ***isomorfa*** *om det finns en isomorfism $T : V \to W$.*

Om V och W är isomorfa skriver vi $V \cong W$.

Proposition 2.9. *Isomorfism är en ekvivalensrelation mellan vektorrum.*

Bevis. Vi skall alltså visa,
(a) $V \cong V$,
(b) Om $V \cong W$ så $W \cong V$ och
(c) Om $U \cong V$ och $V \cong W$ så $U \cong W$.

(a) följer eftersom I_V är en isomorfism på V.

Om $T : V \to W$ är en isomorfi mellan V och W, så är $T^{-1} : W \to V$ en isomorfi mellan W och V och (b) följer.

För (c) observerar vi att om $S : U \to V$ och $T : V \to W$ är isomorfier mellan U och V respektive Voch W, så är TS en isomorfi mellan U och W. □

Korollarium 2.10. *Två ändligtdimensionella vektorrum V och W med samma dimension är ismorfa.*

Bevis. Antag att $\dim V = \dim W = n$. Låt $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ vara en bas för V. Då är $\mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_B$ en isomorfi mellan V och $\mathbb{R}^n$ så $V \cong \mathbb{R}^n$. På samma sätt gäller $W \cong \mathbb{R}^n$ och Proposition 2.9 ger $V \cong W$. □

Proposition 2.11. *Om $T : V \to W$ är en isomorfi mellan V och W och $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ är en bas på V så är $TB = \{T\mathbf{b}_1, T\mathbf{b}_2, \ldots, T\mathbf{b}_n\}$ en bas för W.*

Bevis. Tag $\mathbf{w} \in W$ och låt $\mathbf{v} = T^{-1}\mathbf{w}$. Eftersom B genererar V finns tal x_i med $\mathbf{v} = x_1\mathbf{b}_1 + \ldots + x_n\mathbf{b}_n$. Alltså gäller $\mathbf{w} = T\mathbf{v} = x_1T\mathbf{b}_1 + \ldots + x_nT\mathbf{b}_n$ så TB genererar W.

Om $x_1T\mathbf{b}_1 + \ldots + x_nT\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$ så gäller $T(x_1\mathbf{b}_1 + \ldots + x_n\mathbf{b}_n) = T\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Men T är injektiv så $x_1\mathbf{b}_1 + \ldots + x_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$. Detta ger $x_1 = \ldots = x_n = 0$ eftersom B är linjärt oberoende. Så TB är linjärt oberoende.

Eftersom TB är linjärt oberoende och genererar W är TB en bas. □

En omedelbar konsekvens av detta är

Korollarium 2.12. *Om de ändligtdimensionella vektorrummen V och W är isomorfa så har de samma dimension.*

Från detta följer att om en linjär avbildning mellan två ändligtdimensionella vektorrum V och W är inverterbar så har V och W samma dimension.

Korollarium 2.10 och 2.12 kan sammanfattas i

Sats 2.13. *Två ändligtdimensionella vektorrum V och W är isomorfa om och endast om de har samma dimensionen.*

Anmärkning 2.14. Sats 2.13 gäller också för oändligtdimensionella vektorrum.

Exempel 2.15.

1. Geometriska vektorer i planet är isomorfa med $\mathbb{R}^2$.
2. På samma sätt är geometriska vektorer i rummet isomorfa med $\mathbb{R}^3$.

Dessa isomorfier gjorde det möjligt att "räkna" med de geometriska vektorerna.

3. M_{nm} är isomorft med $\mathbb{R}^{nm}$.
4. $\mathbb{R}_n[t]$ är isomorft med $\mathbb{R}^{n+1}$ eftersom $1, t, t^2, \ldots, t^n$ är en bas för $\mathbb{R}_n[t]$.
5. $\mathbb{R}[t] = \{$alla reella polynom$\}$ är isomorft med $c_{00} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^\infty; r_i = 0$ utom för ändligt många $i\}$.

$\mathbb{R}[t]$ har den uppräkneliga basen $1, t, t^2, t^3, \ldots$ och c_{00} den uppräkneliga basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \ldots$ där $\mathbf{e}_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ där 1 står på plats i. Så avbildningen

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m \mapsto a_0\mathbf{e}_1 + a_1\mathbf{e}_2 + \ldots + a_m\mathbf{e}_m$$

är en isomorfi mellan $\mathbb{R}[t]$ och c_{00}. (Visa det!)

2.4 Linjära avbildningar mellan ändligtdimensionella vektorrum och deras matriser

Låt $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning och $S = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ standardbasen i $\mathbb{R}^n$. Från ***Första kursen*** vet vi att T ges av matrisen $[T] = (T\mathbf{e}_1 \cdots T\mathbf{e}_n)$;

$$T\mathbf{x} = T(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1 T\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n T\mathbf{e}_n = [T][\mathbf{x}]_S \ .$$

Definitionen av matrismultiplikation är gjord så att om $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och $U : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$, så har den sammansatta avbildningen UT matrisen $[UT] = [U][T]$.

I det här avsnittet skall vi se hur detta kan generaliseras till godtyckliga ändligtdimensionella vektorrum.

Vi påminner om att om $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ är en bas för V, $\mathbf{v} = x_1\mathbf{b}_1 + \ldots + x_n\mathbf{b}_n$ och $[\mathbf{v}]_B = (x_1, \ldots, x_n)$, så är $\mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_B$ en isomorfi mellan V och $\mathbb{K}^n$.

Antag nu att $T : V \to W$ är en linjär avbildning och att $A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ är en bas för V och $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ en bas för W. Då genererar T en linjär avbildning $[T]_{BA} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ enligt följande diagram.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] & W \arrow[d, "\cong"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "{[T]_{BA}}"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{v} \arrow[r, "T"] & T\mathbf{v} \arrow[d, "\cong"] \\ {[\mathbf{v}]_A} \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "{[T]_{BA}}"'] & {[T\mathbf{v}]_B} \end{tikzcd}$$

Avbildningen från $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ är sammansatt av tre linjära avbildningar;

$$\mathbb{K}^n \ni [\mathbf{v}]_A = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \mathbf{v} = x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n \mapsto T\mathbf{v} \mapsto [T\mathbf{v}]_B\ .$$

Eftersom $\mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{a}_i \mapsto T\mathbf{a}_i \mapsto [T\mathbf{a}_i]_B$ ges denna avbildning av $m \times n$-matrisen $[T]_{BA} = \Big([T\mathbf{a}_1]_B \ldots [T\mathbf{a}_n]_B\Big)$.

Vi sammanfattar detta i

Sats 2.16. *En linjär avbildning* $\mathbf{w} = T\mathbf{v}$ *mellan två ändligtdimensionella vektorrum* V *och* W *med baserna* A *respektive* B *inducerar en linjär avbildning* $[\mathbf{w}]_B = [T]_{BA}[\mathbf{v}]_A$ *mellan* $\mathbb{K}^{\dim V}$ *och* $\mathbb{K}^{\dim W}$ *med matrisen* $[T]_{BA} = \Big([T\mathbf{a}_1]_B \ldots [T\mathbf{a}_n]_B\Big)$.

Eftersom $\mathbf{w} = T\mathbf{v}$ är ekvivalent med $[\mathbf{w}]_B = [T]_{BA}[\mathbf{v}]_A$ kan vi dra slutsatser om T från egenskaper för $[T]_{BA}$ och tvärtom. T.ex. är ekvationen $T\mathbf{x} = \mathbf{y}$ lösbar om och endast om $[T]_{BA}[\mathbf{x}]_B = [\mathbf{y}]_B$ är lösbar.

En konsekvens av matrisframställningen är följande viktiga resultat.

Sats 2.17 (Dimensionssatsen)**.** *Antag att* $T : V \to W$ *är en linjär avbildning mellan två ändligtdimensionella rum* V *och* W*. Då gäller*

$$\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Ran} T = \dim V\ .$$

Vi ger två bevis av dimensionssatsen. I det första beviset inför vi koordinater och reducerar situationen till matrisfallet. Det andra beviset är mer direkt och använder inte koordinater och matriser.

Bevis 1. Låt $\dim V = n$ och $\dim W = m$. Välj baser A och B på V respektive W och låt $M = [T]_{BA}$ vara matrisen till T i dessa baser. Matrisen M har n kolonner och m rader.

Vi observerar först att $\operatorname{Ker} T$ och $\operatorname{Ker} M$ är isomorfa. För att se detta påminner vi om att $\mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_A$ är en bijektion. Dessutom gäller $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$ om och endast om $M[\mathbf{v}]_A = \mathbf{0}$. Så $\mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_A$ är en bijektion mellan $\operatorname{Ker} T$ och $\operatorname{Ker} M$ som alltså är isomorfa. Enligt Sats 2.13 gäller därför $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Ker} M$. På liknande sätt är $\operatorname{Ran} T$ och $\operatorname{Ran} M$ isomorfa och $\dim \operatorname{Ran} T = \dim \operatorname{Ran} M$.

Så för att visa dimensionssatsen räcker det att visa den i matrisfallet,

$$\dim \operatorname{Ker} M + \dim \operatorname{Ran} M = \dim V\ .$$

Låt $\tilde{M}$ vara den reducerade trappstegsmatrisen till M och antag att antalet pivotelement är k.

Ekvationen $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har samma lösningar som $\tilde{M}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Lösningen har en frihetsgrad för varje fri variabel, dvs. $n-k$ stycken. Så $\dim \operatorname{Ker} M = n-k$.

Vi vet också att de k pivotkolonnerna i matrisen M är en bas för kolonnrummet till M, dvs. $\dim \operatorname{Ran} M = k$. Så

$$\dim \operatorname{Ker} M + \dim \operatorname{Ran} M = (n-k) + k = n = \dim V\ .$$

□

I det andra beviset kommer vi att att använda direkt summa av vektorrum, $V = U_1 \oplus U_2$, se Övning 1.19-21. Från definitionen följer att $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$. Vi betraktar också restriktionen av T till ett delrum U. Denna avbildning betecknas $T|_U$. $T|_U$ är alltså den linjära avbildningen $T|_U : U \to W$ där $T|_U\mathbf{u} = T\mathbf{u}, \mathbf{u} \in U$.

Bevis 2. Antag först att $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ och alltså $\dim \operatorname{Ker} T = 0$. Då är $T : V \to \operatorname{Ran} T$ en bijektion. Så $V \cong \operatorname{Ran} T$ och $\dim \operatorname{Ran} T = \dim V$. Detta ger

$$\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Ran} T = 0 + \dim \operatorname{Ran} T = \dim V\ .$$

Om $\operatorname{Ker} T \neq \{0\}$ finns ett delrum U till V så att $V = \operatorname{Ker} T \oplus U$. Då gäller $\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \dim U$.

För avbildningen $T|_U$ gäller att $\operatorname{Ran} T|_U = \operatorname{Ran} T$. (Varför då?) Dessutom är $\operatorname{Ker} T|_U = \{0\}$. (Varför då?) Alltså gäller

$$\dim \operatorname{Ran} T = \dim \operatorname{Ran} T|_U = \dim U$$

och vi får

$$\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Ran} T = \dim \operatorname{Ker} T + \dim U = \dim V\ .$$

□

Exempel 2.18. Bestäm alla andragradspolynom $p(t)$ så att $Tp(t) = 1 + t^2$ där $Tp(t) = p'(t) + p(t)$.

Lösning. $Tp = p' + p$ är en linjär avbildning på $\mathbb{R}_2[t]$. Låt B vara basen $\{p_0, p_1, p_2\}$ där $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$ och $p_2(t) = t^2$. Då gäller $Tp_0(t) = 0 + 1 = p_0$, $Tp_1(t) = 1 + t = p_0 + p_1$ och $Tp_2(t) = 2t + t^2 = 2p_1 + p_2$. Så $[T]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ansätt $P(t) = A + Bt + Ct^2$. Ekvationen $TP(t) = 1 + t^2$ är ekvivalent med $[T]_{BB}[P(t)]_B = [TP(t)]_B = [1 + t^2]_B$ dvs.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Detta ekvationssystem har lösningen $A = 3$, $B = -2$ och $C = 1$ (Räkna själv!). Alltså uppfyller polynomet $P(t) = 3 - 2t + t^2$ ekvationen.

Från Sats 2.13, eller ***Första kursen*** och Sats 2.16, följer att en inverterbar avbildning T måste ha en kvadratisk matris. En annan viktig följd av Sats 2.16 är att T är inverterbar om och endast om matrisen $[T]_{BA}$ är inverterbar. Från ***Första kursen*** vet vi att $[T]_{BA}$, och därmed T, är inverterbar om och endast om $\det[T]_{BA} \neq 0$. Vi får också följande

Sats 2.19. *Antag att T är en linjär avbildning på ett ändligtdimensionellt rum. Då är följande påståenden ekvivalenta.*

(a) T är inverterbar

(b) T är injektiv

(c) T är surjektiv

Så för att hitta en lösning till ekvationen $T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ räcker det att visa entydighet! Mer allmänt gäller Sats 2.19 för en avbildning mellan två rum med samma (ändliga) dimension. Sats 2.19 är fel för oändligtdimensionella rum.

(Mot)exempel: Vi påminner om fram och bakåtskift F och B på $\mathbb{R}^\infty$, $F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ och $B(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$. Då är (eller hur?) F injektiv men inte surjektiv och B surjektiv men inte injektiv. Desssutom gäller $BF = I$ men $FB \neq I$.

Sats 2.20. *Antag att $T_1 : U \to V$ och $T_2 : V \to W$ är linjära avbildningar och att vektorrummen U, V och W har baser A, B respektive C. Då gäller*

$$[T_2T_1]_{CA} = [T_2]_{CB}[T_1]_{BA}$$

Bevis. Det följer av diagrammet

$$\begin{tikzcd}
U_A \arrow[r, "T_1"] \arrow[rr, bend left, "T_2T_1"] \arrow[d, dash, "\cong"'] & V_B \arrow[r, "T_2"] \arrow[d, dash, "\cong"'] & W_C \arrow[d, dash, "\cong"'] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "{[T_1]_{BA}}"] \arrow[rr, bend right, "{[T_2T_1]_{CA}}"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "{[T_2]_{CB}}"] & \mathbb{K}^d
\end{tikzcd}$$

och att vi vet att sammansättning av avbildningar mellan $\mathbb{K}^n$-rum ges av matrismultiplikation.

□

2.5 Basbyten

I den här paragrafen skall vi studera hur matrisen $[T]_{BA}$ ändras vid basbyten. Vi börjar med att studera identiten på V.

Så låt $I\mathbf{v} = \mathbf{v}$ vara identiteten på V och A och B baser på V. Enligt Sats 2.16 så gäller $[\mathbf{v}]_B = [I]_{BA}[\mathbf{v}]_A$ där $[I]_{BA} = \Big([I\mathbf{a}_1]_B \dots [I\mathbf{a}_n]_B\Big) = \Big([\mathbf{a}_1]_B \dots [\mathbf{a}_n]_B\Big)$.

Matrisen $[I]_{BA}$ kallas för koordinatbytesmatrisen. Enligt Sats 2.20 med $U = W = V$ och $T_1 = T_2 = I$ får vi $[I]_{AB}[I]_{BA} = [I]_{AA}$. Men $[I]_{AA}$ är enhetsmatrisen så $[I]_{BA}$ är en inverterbar matris med inversen $[I]_{AB}$.

Antag omvänt att $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ är en bas och $P = (\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n) = (p_{ij})$ en inverterbar matris. Om vi sätter $[\mathbf{b}_i]_A = P[\mathbf{a}_i]_A$ så är $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ en ny bas på V. Notera att eftersom $[\mathbf{a}_i]_A = \mathbf{e}_i$ så gäller $[\mathbf{b}_i]_A = \mathbf{p}_i$ eller ekvivalent $\mathbf{b}_i = \sum_{k=1}^n p_{ki}\mathbf{a}_k$. Så $P = ([\mathbf{b}_1]_A \cdots [\mathbf{b}_n]_A) = [I]_{AB}$.

Så om vi byter bas med matrisen $[I]_{AB}$ sker koordinatbytet med dess invers $[I]_{BA} = \Big([\mathbf{a}_1]_B \dots [\mathbf{a}_n]_B\Big)$.

Nu till det här avsnittets huvudresultat.

Sats 2.21. *Antag att $T : V \to W$ är en linjär avbildning och $A, \tilde{A}$ och $B, \tilde{B}$ är baser på V respektive W. Då gäller*

$$[T]_{\tilde{B}\tilde{A}} = [I]_{\tilde{B}B}[T]_{BA}[I]_{A\tilde{A}}\ .$$

Bevis.

$$
\begin{tikzcd}
V_{\tilde{A}} \arrow[r, "I"] \arrow[rrr, bend left, "T"] \arrow[d, dash, "\cong"'] & V_A \arrow[r, "T"] \arrow[d, dash, "\cong"'] & W_B \arrow[r, "I"] \arrow[d, dash, "\cong"'] & W_{\tilde{B}} \arrow[d, dash, "\cong"'] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "{[I]_{A\tilde{A}}}"] \arrow[rrr, bend right, "{[T]_{\tilde{B}\tilde{A}}}"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "{[T]_{BA}}"] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "{[I]_{\tilde{B}B}}"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}
$$

□

Ett viktigt specialfall av detta är då T är en operator på V. Oftast anger vi matrisen för T i en och samma bas och skriver ofta $[T]_B$ i stället för $[T]_{BB}$. I detta fall förenklas Sats 2.21 till följande

Korollarium 2.22. *Om $T : V \to V$ är en linjär operator på V och A och B två baser på V så gäller*

$$[T]_B = [I]_{BA}[T]_A[I]_{AB} = [I]_{BA}[T]_A[I]_{BA}^{-1} .$$

Om vi sätter $P = [I]_{BA}$ kan detta skrivas $[T]_B = P[T]_A P^{-1}$. Därför är det naturligt med

Definition 2.23. *Två kvadratiska matriser A och B är* ***konjugerade*** *om det finns en inverterbar matris P med $A = PBP^{-1}$.*

Vi skriver $A \equiv B$.

Terminologin är inte standard. På engelska används similar och ibland kan man på svenska också se similär (fy).

Vi har sett att matrisen till en operator T i olika baser är konjugerade. I nästa kapitel skall vi ge metoder för att välja bas så att denna matris blir så enkel som möjligt.

Övning 2.8. Visa att konjugering är en ekvivalensrelation, dvs.

a) $A \equiv A$,

b) om $A \equiv B$ så $B \equiv A$, och

c) om $A \equiv B$ och $B \equiv C$, så $A \equiv C$.

Övning 2.9. Visa att om $A \equiv B$ så gäller $\det A = \det B$.

Den sista övningen gör att vi kan definiera determinanten till en operator på V.

Definition 2.24. *Om T är en linjär operator på ett vektorrum V så är $\det T = \det[T]_B$ där B är en (godtycklig) bas på V.*

Övning 2.10. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning. Visa att om $\mathbf{z}$ är mittpunkten på sträckan från $\mathbf{x}$ till $\mathbf{y}$ så är $T\mathbf{z}$ mittpunkten på sträckan från $T\mathbf{x}$ till $T\mathbf{y}$.

Övning 2.11. Låt R_α vara rotationsmatrisen

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} .$$

Vad är $R_\alpha R_\beta$? Visa att $R_\alpha R_\beta = R_\beta R_\alpha$. Härled additionsformlerna för $\sin(\alpha+\beta)$ och $\cos(\alpha+\beta)$ från detta.

Övning 2.12. Ange en linjär avbildning $T \neq 0$ sådan att $T^2 = 0$.

Övning 2.13. Ange två linjära avbildningar A och B sådana att $AB = 0$ men $BA \neq 0$.

Övning 2.14. Ge exempel på en avbildning T på $\mathbb{R}^2$ som uppfyller att $T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T\mathbf{v}$ men som inte är linjär.

Övning 2.15. Antag att T är en linjär injektiv operator på V och att $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ är linjärt oberoende. Visa att $T\mathbf{e}_1, \ldots, T\mathbf{e}_n$ är linjärt oberoende.

Övning 2.16. Antag att T är en linjär surjektiv operator på V och att $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ spänner V. Visa att $T\mathbf{e}_1, \ldots, T\mathbf{e}_n$ spänner V.

Övning 2.17. Antag att T är en linjär operator från $\mathbb{R}^4$ till $\mathbb{R}^2$ med

$$\operatorname{Ker} T = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4; x_1 = 5x_2 \text{ och } x_4 = 3x_3\};.$$

Visa att då är T surjektiv.

Övning 2.18. Visa att det inte finns någon linjär operator T från $\mathbb{C}^5$ till $\mathbb{C}^2$ med

$$\operatorname{Ker} T = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^5; x_1 = 5x_2 \text{ och } x_3 = x_4 = 2x_5\};.$$

Övning 2.19. Antag att AB är inverterbar. Visa att A har en högerinvers och att B har en vänsterinvers. Vilka är de?

Övning 2.20. Ge exempel på två linjära avbildningar sådana att:

(a) A och B är inverterbara men $A + B$ är inte inverterbar.

(b) $A + B$ är inverterbar men varken A eller B är inverterbara.

Övning 2.21. Antag att både V och W är ändligtdimensionella. Visa att det finns en surjektiv linjär avbildning $T : V \to W$ om och endast om $\dim W \leq \dim V$.

Övning 2.22. Antag att U och V är ändligtdimensionella vektorrum, och att $T : U \to V$, $S : V \to W$. Då gäller

$$\dim \operatorname{Ker} ST \leq \dim \operatorname{Ker} S + \dim \operatorname{Ker} T .$$

Övning 2.23. Låt T vara en linjär operator på ett ändligtdimensionellt rum V. Antag att $ST = TS$ för varje linjär operator S på V. Visa att då är T en skalär multipel av identiteten.

Övning 2.24. (a) Visa att vektorerna $(1, 2, 1, 1)$, $(0, 1, 3, 1)$, $(0, 3, 2, 0)$ och $(0, 1, 0, 0)$ är en bas för $\mathbb{R}^4$.

(b) Bestäm koordinatbytesmatrisen mellan koordinater i denna bas och standardkoordinaterna på $\mathbb{R}^4$.

(c) Vad har $(1, 0, 1, 0)_B$ för koordinater i standardbasen?

(d) Vad har $(1, 0, 1, 0)_S$ för koordinater i basen i den nya basen?

Övning 2.25. Bestäm koordinatbytesmatrisen mellan baserna $p_0 = 1$, $p_1 = 1 + t$ och $q_0 = 1 - t$, $q_1 = 1 + 2t$ på $\mathbb{P}_2$.

Övning 2.26. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ given av $T\mathbf{x} = (3x_1 + x_2, x_1 - 2x_2)$. Bestäm matrisen för T i standardbasen och i basen $(1, 1)$, $(1, 2)$.

Övning 2.27. Är matriserna $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ konjugerade? Motivera ditt svar.

Övning 2.28. Visa dimensionsatsen enligt följande recept: Låt $\mathbf{b}_1, \dots \mathbf{b}_k$ vara en bas för $\operatorname{Ker} T$, och utvidga den till en bas $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1}, , \dots, \mathbf{b}_n$ för V. Då är $T\mathbf{b}_{k+1}, , \dots, T\mathbf{b}_n$ en bas för $\operatorname{Ran} T$. (Den uppmärksamme lösaren upptäcker att det är precis detta vi gjorde i Bevis 2, men här det meningen att visa det direkt.)

Förslag till svar

2.3 Se ledningen till Övning 2.4

2.5 T.ex. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x, y) = x$ och $c(x) = (x, \sin y)$

2.6 Ja

2.7 Nej

2.11 $\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta & -(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) \\ \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha & \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$

2.12 T.ex. $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.13 T.ex. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.14 T.ex. $T(x, y) = (\operatorname{sgn}(xy)\sqrt{|x|}\sqrt{|y|}, \operatorname{sgn}(xy)\sqrt{|x|}\sqrt{|y|})$

2.19 $B(AB)^{-1}$ är högerinvers till A, $(AB)^{-1}A$ är vänsterinvers till B

2.20 (a) T.ex. $A = -B = I$, (b) T.ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.24 (b) $[I]_{SB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (c) $(1, 5, 3, 1)_S$, (d) $\frac{1}{2}(2, -2, 3, -11)_B$

2.25 $[I]_{PQ} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

2.26 $[T]_S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ och $[T]_B = \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$

2.27 Nej, de har skilda determinanter.

Kapitel 3

Spektralteori

I det här kapitlet är $T : V \to V$ en linjär avbildning på ett ändligtdimensionellt vektorrum V.

3.1 Egenvärden och egenvektorer

Det är lättare att förstå hur en avbildning T fungerar om dimensionen på vektorrummet är litet. Så vi vill ha en uppdelning

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$$

där delrummen U_i är invarianta (se nedan) under T. Då följer ”allt” om T från uppförande av T på U_i.

Vi påminner om att V är en direkt summa av delrummen U_i,

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m \ ,$$

om varje vektor $\mathbf{v} \in V$ entydigt kan skrivas $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_m$ där $\mathbf{u}_i \in U_i$, se Övning 1.20.

Definition 3.1. *Låt T vara en linjär avbildning på V. Ett delrum U till V är* ***invariant*** *med avseende på T om $T(U) \subseteq U$.*

Om vi väljer baser för delrummen U_i och slår ihop dem till en bas B för

V så gäller

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T]_1 & 0 & \cdot & \cdot & & 0 \\ 0 & [T]_2 & & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & & \cdot & 0 & [T]_m \end{pmatrix}$$

där $[T]_i$ är matrisen för restriktionen av T till U_i. Vi säger att matrisen är ***blockdiagonal***. Allra bäst är det när rummen U_i är endimensionella. Då blir $[T]_B$ en diagonalmatris.

Att U_i är endimensionellt betyder att det finns en vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ så att $T\mathbf{u} \in \text{Span}(\mathbf{u})$ dvs. att $T\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. Vi leds alltså till följande definition.

Definition 3.2. *Vektorn* $\mathbf{u}$ *är en* ***egenvektor*** *till* T *med egenvärdet* λ *om* $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ *och*

$$T\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \,.$$

Vi låter E_λ vara ***egenvärdesrummet*** till egenvärdet λ, dvs. det delrum till V som består av alla egenvektorer till egenvärdet λ samt $\mathbf{0}$. Så $E_\lambda = \{\mathbf{u}; T\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\}$.

Studiet av egenvärden och egenvektorer är temat för detta kapitel.

Spektralteori fungerar bättre på komplexa vektorrum än reella vektorrum. Anledningen till detta är följande sats.

Sats 3.3. *Varje polynom* P *med komplexa koefficienter av grad* n*,* $n \geq 1$ *har* n *komplexa rötter* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *och*

$$P(z) = c(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n) \,.$$

Sats 3.3 följer av algebrans fundamentalsats, som säger att varje polynom av grad minst 1 har en komplex rot, och faktorsatsen.

Ett reellt polynom behöver därimot inte ha någon reell rot. Men vi kan alltid faktorisera ett reellt polynom med reella faktorer av första eller andra graden.

Sats 3.4. *Ett polynom med reella koefficienter av grad* n *kan skrivas*

$$P(x) = c(x - a_1) \cdots (x - a_k)(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1) \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)$$

där $k + 2l = n$ *och* c*,* a_k *och* α_i, β_i *är reella tal med* $4\beta_i > \alpha_i^2$*.*

Observera att rötterna till $x^2 + \alpha_i x + \beta_i$ inte är reella.

Eftersom T är en operator på V är sammansättning av T med sig själv definierad. Vi låter

$$T^m = \underbrace{T \circ T \circ T \circ \cdots \circ T}_{m \text{ stycken}}$$

och om $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_1 z + a_0$ är ett polynom, sätter vi $P(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \ldots a_1 T + a_0 I$. Observera att om

$$P(z) = c(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n)$$

så har $P(T)$ samma faktorisering,

$$P(T) = c(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \cdots (T - \lambda_n I) \ .$$

Detta följer eftersom T och I kommuterar, och därför gäller samma räkneregler för beräkning av $c(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n)$ som för $c(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \cdots \ (T - \lambda_n I)$.

För komplexa vektorrum gäller

Sats 3.5. *En linjär avbildning T på ett ändligtdimensionellt komplext vektorrum V har en egenvektor.*

Bevis. Vi ger två bevis. Det första beviset är ”invariant”, dvs. det använder inte koordinater och matrisrepresentation. I det andra beviset använder vi koordinater och reducerar satsen till matrisfallet.

Bevis 1.

Låt vektorrummets dimension vara n, tag en godtycklig vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ och betrakta vektorerna

$$\mathbf{v}, T\mathbf{v}, T^2\mathbf{v}, \ldots, T^n\mathbf{v} \ .$$

De är $n + 1$ stycken, alltså fler än dimensionen, och därför linjärt beroende. Låt m vara det minsta talet, $1 \leq m \leq n$, så att $\mathbf{v}, T\mathbf{v}, T^2\mathbf{v}, \ldots, T^m\mathbf{v}$ är linjärt beroende. Det finns alltså $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_m) \neq \mathbf{0}$ med $c_m \neq 0$ och

$$c_0\mathbf{v} + c_1 T\mathbf{v} + c_2 T^2\mathbf{v} + \ldots + c_m T^m\mathbf{v} = \mathbf{0} \ .$$

Låt $P(z)$ vara polynomet $P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_m z^m$. Genom att dividera polynomet med c_m kan vi anta att $c_m = 1$. Om $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ är polynomets nollställen har vi $P(z) = (z - \lambda_m)(z - \lambda_{m-1}) \ldots (z - \lambda_2)(z - \lambda_1)$. Så

$$\begin{aligned} c_0\mathbf{v} + c_1 T\mathbf{v} + c_2 T^2\mathbf{v} + \ldots + T^m\mathbf{v} &= (c_0 + c_1 T + c_2 T^2 + \ldots + T^m)\mathbf{v} \\ &= (T - \lambda_m I)(T - \lambda_{m-1} I) \ldots (T - \lambda_2 I)(T - \lambda_1 I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \ . \end{aligned}$$

Låt $\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}$ och sätt för $1 \le k \le m$,

$$\mathbf{u}_k = (T - \lambda_k I)(T - \lambda_{k-1} I) \dots (T - \lambda_2 I)(T - \lambda_1 I)\mathbf{v} \ .$$

Då gäller $\mathbf{u}_0 \neq \mathbf{0}$ men $\mathbf{u}_m = \mathbf{0}$. Så det finns ett tal $0 \le k \le m - 1$ så att $\mathbf{u}_k \neq \mathbf{0}$ men $\mathbf{u}_{k+1} = (T - \lambda_{k+1} I)\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$. Detta betyder att $\mathbf{u}_k$ är en egenvektor till T med egenvärdet λ_{k+1}.

Bevis 2.

Låt B vara en bas på V. Att λ är ett egenvärde till T betyder att $T - \lambda I$ inte är injektiv. Låt $p(\lambda) = \det(T - \lambda I) = \det[T - \lambda I]_B$. $p(\lambda)$ är ett polynom av grad $n \ge 1$ och algebrans fundamentalsats ger att $p(\lambda)$ har ett komplext nollställe λ_0. Så $\det(T - \lambda_0 I) = 0$ och $T - \lambda_0 I$ är inte injektiv.

Detta betyder att ekvationssystemet $[T - \lambda_0 I]_B[\mathbf{u}]_B = \mathbf{0}$ har en icketrivial lösning $[\mathbf{u}]_B \in \mathbb{C}^n$. Så $[T\mathbf{u}]_B = [T]_B[\mathbf{u}]_B = \lambda_0[\mathbf{u}]_B$ och alltså $T\mathbf{u} = \lambda_0 \mathbf{u}$ dvs. $\mathbf{u}$ är en egenvektor.

□

Här är ett citat från Axler om dessa bevis:

Compare the simple proof of this theorem given here (Bevis 1) *with the standard proof using determinants* (Bevis 2). *With the standard proof, first the difficult concept of determinants must be defined, then an operator with* 0 *determinant must be shown to be not invertible, then the characteristic polynomial needs to be defined, and by the time the proof of this theorem is reached, no insight remains about why it is true.*

Håller du med?

Anmärkning 3.6. Vi har i samband med Definition 2.24 sett att $\det[T]_B$ inte beror på valet av bas. Därför beror inte heller $\det[T - \lambda I]_B$ på basen och vi kan definiera ***det karakteristiska polynomet*** till en operator på V genom $p(\lambda) = \det(T - \lambda I) = \det[T - \lambda I]_B$.

Dessutom gäller att λ är ett egenvärde om och endast om $T - \lambda I$ inte är injektiv vilket är ekvivalent med att $T - \lambda I$ inte är inverterbar. Men detta gäller om och endast om $[T - \lambda I]_B$ inte är inverterbar och från ***Första kursen*** vet vi att detta betyder att $\det[T - \lambda I]_B = 0$. Så att λ är ett egenvärde till T är ekvivalent med att λ är ett nollställe till det karakteristiska polynomet $p(\lambda)$.

Korollarium 3.7. *Varje linjär avbildning på ett ändligtdimensionellt komplext vektorrum har ett endimensionellt invariant delrum.*

Bevis. Span($\mathbf{u}$) där $\mathbf{u}$ är en egenvektor duger. □

Det finns linjära operatorer på reella vektorrum som inte har någon egenvektor.

Exempel 3.8. Låt T vara en rotation (skild från 0° eller 180°) på $\mathbb{R}^2$, t.ex. $T(x,y) = (-y,x)$. Då har T ingen reell egenvektor.

Att T som är en rotation inte kan ha en egenvektor är klart av geometriska skäl, $\mathbf{u}$ och $T\mathbf{u}$ kan inte vara parallella. Vi kan också se det algebraiskt. Villkoret $T(x,y) = \lambda(x,y)$ betyder $(-y,x) = \lambda(x,y)$ eller $y = -\lambda x, x = \lambda y$. Men detta ger $x = -\lambda^2 x$ och $y = -\lambda^2 y$. Nu är inte både x och y noll så vi får $\lambda^2 = -1$ vilket är en omöjlighet då $\lambda \in \mathbb{R}$.

För reella vektorrum har vi

Sats 3.9. *Om T är en linjär avbildning på ett reellt ändligtdimensionellt vektorrum så har T ett invariant delrum av dimension ett eller två.*

Bevis. Polynomet i Bevis 1 av Sats 3.5 har reella koefficienter och enligt Sats 3.4 kan det faktoriseras i reella polynom av första eller andra graden. Så antingen finns $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ med $(T-aI)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ eller $(T^2+aT+b)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ där x^2+ax+b saknar reellt nollställe. I det första fallet är $\mathbf{u}$ en egenvektor och Span($\mathbf{u}$)är ett endimensionellt invariant delrum. I det andra fallet låter vi $U = \text{Span}(\mathbf{u}, T\mathbf{u})$ som har dimension ett eller två. För att se att U är ett invariant delrum räcker det att visa att $T(T\mathbf{u}) = T^2(\mathbf{u}) \in U$. Men $(T^2 + aT + b)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ger $T^2\mathbf{u} = -aT\mathbf{u} - b\mathbf{u} \in \text{Span}(\mathbf{u}, T\mathbf{u}) = U$.

□

Vi har också

Sats 3.10. *En linjär avbildning T på ett ändligtdimensionellt reellt vektorrum av udda dimension V har en egenvektor.*

Bevis. Det reella karakteristiska polynomet har udda grad. Ett reellt polynom av udda grad har ett reellt nollställe λ. (Varför då?) Så den reella ekvationen $[T - \lambda I]_B \mathbf{x} = \mathbf{0}$ har en icketrivial lösning $\mathbf{x} = [\mathbf{u}]_B \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{u}$ är en egenvektor i V med det reella egenvärdet λ. □

Anmärkning 3.11. Ett berömt problem i funktionalanalys är det så kallade ”Invarianta delrumsproblemet” som handlar om existensen av ett icketrivialt invariant delrum till begränsade operatorer på oändligtdimensionella komplexa vektorrum. En svensk matematiker, Per Enflo, visade 1975 att det finns en operator på ett Banachrum utan invariant delrum. Problemet är olöst för Hilbertrum. Se Kapitel 6 för definition av Banachrum och Hilbertrum. För mer information se

http://en.wikipedia.org/wiki/Invariant_subspace_problem

3.2 Diagonalisering

Det bästa vi kan hoppas på vid studiet av en operator T på V är alltså att V kan skrivas som en direkt summa av endimensionella invarianta delrum till T. Tag en nollskild vektor $\mathbf{e}_i$ från vart och ett av dessa delrum. Då är $\mathbf{e}_i$ en egenvektor och $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n\}$ är en bas för V sådan att $[T]_B$ är en diagonalmatris.

Definition 3.12. *En linjär operator $T : V \to V$ är **diagonaliserbar** om det finns en bas B på V sådan att $[T]_B$ är en diagonalmatris.*

Sats 3.13. *Antag att $T : V \to V$ är en linjär operator på V och att* $\dim V = n$. *Då är T diagonaliserbar om och endast om V har en bas $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ av egenvektorer till T.*

Bevis. Antag att T är diagonaliserbar i basen $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ och att $[T]_B = D =$diag$(\lambda_1 \cdots, \lambda_n)$. Då gäller $\Big([T\mathbf{e}_1]_B \cdots [T\mathbf{e}_n]_B\Big) = [T]_B = D = \Big(\lambda_1[\mathbf{e}_1]_B \cdots \lambda_n[\mathbf{e}_n]_B\Big)$. Alltså är $[T\mathbf{e}_i]_B = \lambda_i[\mathbf{e}_i]_B$. Så $T\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i$, dvs. $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ är egenvektorer till T.

Antag omvänt att $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ är en bas av egenvektorer till T, $T\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_1$. Då gäller $[T]_B = ([T\mathbf{e}_1]_B, \ldots, [T\mathbf{e}_n]_B) = (\lambda_1[\mathbf{e}_1]_B \cdots, \lambda_n[\mathbf{e}_n]_B) =$ diag$(\lambda_1 \cdots, \lambda_n)$ och alltså är T diagonaliserbar. $\square$

Tyvärr är inte alla operatorer diagonaliserbara, inte ens i komplexa vektorrum.

Exempel 3.14. Låt $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ vara definierad genom $T(z_1, z_2) = (z_2, 0)$. I standardbasen på $\mathbb{C}^2$ betyder detta att $[T]_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Det är lätt att se att T bara har egenvärdet 0 och att $(1, 0)$ är en bas för E_0 (Kontrollera det!). Så rummet av egenvektorer är endimensionellt och det finns inte tillräckligt många egenvektorer för att spänna det tvådimensionella $\mathbb{C}^2$. Så T är inte diagonaliserbar.

Följande exempel visar på nyttan av att kunna diagonalisera operatorer. Fler exempel kommer i nästa kapitel.

Exempel 3.15. Låt $\mathbb{P}_2 = \{a + bt + ct^2\}$ vara rummet av alla andragradspolynom och låt T vara operatorn $(t + 1)\frac{d}{dt}$ på $\mathbb{P}_2$. Beräkna T^N.

Lösning. Låt S vara standardbasen $\{p_0 = 1, p_1 = t, p_2 = t^2\}$. Eftersom $Tp_0 = 0$, $Tp_1 = t + 1 = p_0 + p_1$ och $Tp_2 = 2t^2 + 2t = 2p_1 + 2p_2$ gäller

$$A = [T]_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Standardkalkyler från ***Första kursen*** (Gör dem!) visar att matrisen A har egenvärdena 0, 1 och 2 med egenvektorerna $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ respektive $(1, 2, 1)$.

Låt $[\mathbf{e}_0]_s = (1, 0, 0)$, $[\mathbf{e}_1]_s = (1, 1, 0)$ och $[\mathbf{e}_2]_s = (1, 2, 1)$ dvs. $\mathbf{e}_0 = p_0 = 1$, $\mathbf{e}_1 = p_0 + p_1 = 1 + t$ och $\mathbf{e}_2 = p_0 + 2p_1 + p_2 = 1 + 2t + t^2$. I basen $B = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ gäller

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ och } [T^N]_B = [T]_B^N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^N \end{pmatrix}.$$

Vi har

$$[I]_{SB} = \Big([\mathbf{e}_0]_S \; [\mathbf{e}_1]_S \; [\mathbf{e}_2]_S\Big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Genom att beräkna inversen får vi

$$[I]_{BS} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enligt Korollarium 2.22 har vi $[T]_S = [I]_{SB}[T]_B[I]_{BS}$ och alltså $[T^N]_S = [T]_S^N = [I]_{SB}[T]_B^N[I]_{BS}$. En kalkyl (Gör den!) ger

$$[T^N]_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2^N - 2 \\ 0 & 1 & 2^{N+1} - 2 \\ 0 & 0 & 2^N \end{pmatrix}.$$

Med invarianta beteckningar kan detta skrivas

$$\left((t+1)\frac{d}{dt}\right)^N (a+bt+ct^2) = (b+(2^N-2)c) + (b+(2^{N+1}-2)c)t + c2^N t^2 \ .$$

Det är alltså önskvärt att kunna diagonalisera en operator. Ett enkelt, men viktigt resultat om när det går är korrollariet till följande sats.

Sats 3.16. *Antag att* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ *är egenvektorer till operatorn* T *med olika egenvärden. Då är* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ *linjärt oberoende.*

Bevis. Låt $T\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ där $\lambda_i \neq \lambda_k$. Antag att

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0} \ . \tag{3.1}$$

Låt $S_i = (T-\lambda_1 I)\cdots(T-\lambda_{i-1}I)(T-\lambda_{i+1}I)\cdots(T-\lambda_n I)$, dvs. S_i är produkten av alla faktorerna $T-\lambda_k I$ utom nummer i. Nu gäller $(T-\lambda_k I)\mathbf{e}_k = \mathbf{0}$ och $(T-\lambda_k I)\mathbf{e}_i = (\lambda_i - \lambda_k)\mathbf{e}_i$. Genom att applicera S_i på (3.1) får vi

$$\alpha_i(\lambda_i-\lambda_1)\cdots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\cdots(\lambda_i-\lambda_n)\mathbf{e}_i = \mathbf{0} \ .$$

Eftersom $\mathbf{e}_i \neq \mathbf{0}$ och $\lambda_i \neq \lambda_k$ ger detta $\alpha_i = 0$ och $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ är linjärt oberoende. □

Korollarium 3.17. *Antag att* T *är en linjär operator på ett vektorrum* V *med dimension* n*. Om* T *har* n *olika egenvärden så är* T *diagonaliserbar.*

Bevis. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ vara egenvektorer till T med olika egenvärden. Enligt Sats 3.16 är de linjär oberoende. Men enligt Korollarium 1.20 är n linjärt oberoende vektorer i V en bas. Påståendet följer nu från Sats 3.13. □

Enligt Korollarium 3.17 är T diagonaliserbar om T inte har multipla egenvärden.

Definition 3.18. *Låt* λ *vara ett egenvärde och* $p(z)$ *det karakteristiska polynomet till* T*.*

1. *Om* m *är det största heltal sådant att* $(z-\lambda)^m$ *delar* $p(z)$ *säger vi att* λ *har* ***algebraisk multiplicitet*** m*.*

2. *Om* $d = \dim E_\lambda = \dim \mathrm{Ker(T - \lambda I)}$ *säger vi att* T *har* ***geometrisk multiplicitet*** d*.*

Algebraisk multiplicitet används mycket oftare än geometrisk multiplicitet. Därför kommmer vi ofta att bara säga multiplicitet i stället för algebraisk multiplicitet.

Sats 3.19. *Den geometriska multipliciteten är alltid mindre än eller lika med den algebraiska multipliciteten.*

Bevis. Antag att λ_0 är ett egenvärde och låt $d = d_{\lambda_0} = \dim E_{\lambda_0}$ och $m = m_{\lambda_0}$ vara den geometriska och den algebraiska multipliciteten för λ_0. Välj en bas $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ för E_{λ_0} och utvidga den till en bas B för V. I denna bas gäller, som i beviset av Sats 3.13, att

$$[T]_B = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_0 I_d & A_1 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$$

för några matriser A_1 och A_2. Så

$$p_T(\lambda) = \det \left(\begin{array}{c|c} (\lambda_0 - \lambda) I_d & A_1 \\ \hline 0 & A_2 - \lambda I \end{array}\right) = (\lambda_0 - \lambda)^d p_{A_2}(\lambda) \ .$$

Den sista likheten får vi genom att d gånger utveckla determinanten efter första kolonnen. Detta ger $d \leq m$ (med likhet om och endast om $p_{A_2}(\lambda_0) \neq 0$). $\square$

Exempel 3.14 visar att den geometriska multipliciteten kan vara strikt mindre än den algebraiska. Enligt nästa sats är det precis detta som kan hindra en operator på ett komplext vektorrum från att vara diagonaliserbar.

Om $T : V \to V$ är diagonaliserbar och $\dim V = n$ så gäller

$$\det(T - \lambda I) = \det(D - \lambda I) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_n) \ ,$$

där $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Så det karakteristiska polynomet har n nollställen räknat med multiplicitet. Detta gäller alltid för komplexa vektorrum men för reella vektorrum är det ett villkor på T.

Sats 3.20. *En linjär operator på ett komplext vektorrum är diagonaliserbar om och endast om för varje egenvärde λ gäller att den algebraiska och den geometriska multipliciteten sammanfallller.*

Anmärkning 3.21. Satsen gäller också för en operator på ett reellt vektorrum där alla nollställen till det karakteristiska polynomet är reella.

Bevis. Om operatorn T kan diagonaliseras har T en bas av egenvektorer. Så $V = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k}$. Enligt Sats 3.19 gäller alltså $n = \dim V = d_{\lambda_1} + \ldots + d_{\lambda_k} \leq m_{\lambda_1} + \ldots + m_{\lambda_k} = n$. Detta ger $d_i = m_i$ för alla i.

Omvänt, om $d_i = m_i$ för alla i och $U = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k}$, så gäller $\dim U = d_{\lambda_1} + \ldots + d_{\lambda_k} = m_{\lambda_1} + \ldots + m_{\lambda_k} = n$. Men detta betyder att $U = V$ så V har en bas av egenvektorer och T är alltså diagonaliserbar enligt Sats 3.13. $\square$

Tyvärr är inte villkoret i satsen enkelt att kontrollera. I Kapitel 7 skall vi bevisa den så kallade Spektralsatsen som säger att en reell självadjungerad operator eller en komplex normal operator kan diagonaliseras. Villkoren att vara självadjungerad respektive normal är enkla att kontrollera.

I Kapitel 8 skall vi bevisa Jordans normalform som beskriver hur man skall välja bas för att en operator som inte är diagonaliserbar skall få så enkel matrisrepresentation som möjligt.

Övning 3.1. Vilka av följande påståenden är sanna?

(a) Varje operator på ett n-dimensionellt komplext vektorrum har n olika egenvärden.

(b) Om T har en egenvektor har den oändligt många egenvektorer.

(c) Det finns en operator på ett reellt vektorrum utan egenvektor.

(d) Det finns en operator på ett ändligtdimensionellt komplext vektorrum utan egenvektor.

(e) Det finns en operator på ett oändligtdimensionellt komplext vektorrum utan egenvektor.

(f) Summan av två egenvektorer är en egenvektor.

(g) Summan av två egenvektorer till samma egenvärde är en egenvektor.

Bevis eller motexempel.

Övning 3.2. Bestäm det karakteristiska polynomet, egenvärden och egenvektorer till

$$(a)\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},\ (b)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ och } (c)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Övning 3.3. Bestäm egenvärden och egenvektorer till rotationsmatrisen

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Övning 3.4. En operator T är nilpotent om $T^k = 0$ för något k. Visa att om T är nilpotent så har T endast egenvärdet 0.

Övning 3.5. Låt A vara en kvadratisk matris. Visa att de fyra blocktriangulära matriserna

$$\begin{pmatrix} I & * \\ 0 & A \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & I \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} I & 0 \\ * & A \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & I \end{pmatrix}$$

alla har determinanten $\det A$. Matrisen $*$ betecknar en godtycklig matris.

Övning 3.6. Visa att om A och B är kvadratiska matriser så gäller

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \det B \, .$$

Ledning. $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$.

Övning 3.7. Låt A och B vara en $m \times n$-matris respektive en $n \times m$-matris. Visa att då gäller

$$\det \begin{pmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{pmatrix} = \det AB \, .$$

Ledning. Högermultiplicera med $\begin{pmatrix} I & 0 \\ B & I \end{pmatrix}$.

Övning 3.8. Låt A och B vara kvadratiska matriser. Visa att det karakteristiska polynomet till den blocktriangulära matrisen $\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$ är produkten av de karakteristiska polynomen till A och B.

Övning 3.9. Låt $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \mathbf{v}_n$ vara en bas B i vektorrummet V. Visa att om $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \mathbf{v}_k$ alla är egenvektorer till operatorn T med egenvärdet λ så är matrisen till T i denna bas blocktriangulär,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda I_k & * \\ 0 & A \end{pmatrix} \, .$$

Här är I_k enhetsmatrisen av storlek k, A är en kvadratisk och $*$ en godtycklig matris.

Övning 3.10. Visa att den geometriska multipliciteten till ett egenvärde inte kan vara större än dess algebraiska multiplicitet.

Övning 3.11. Visa att en operators determinant är produkten av dess egenvärden (med multiplicitet).

Ledning. Visa att $\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$ och sätt $\lambda = 0$.

Övning 3.12. ***Spåret*** till en matris är summan av dess diagonalelement, dvs. om $A = (a_{ij})$ så är $\operatorname{Tr} A = a_{11} + \ldots + a_{nn}$.

Låt $[T]_B$ vara matrisen till en operator T i en bas B. Bevisa att spåret till $[T]_B$ inte beror på valet av bas B genom att visa att spåret för $[T]_B$ är summan av egenvärdena till T (med multiplicitet).

(Vi kan alltså definera spåret till T genom $\operatorname{Tr} T = \operatorname{Tr} [T]_B$ där är en godtycklig bas.)

Ledning. Låt $A = [T]_B$ i någon bas B. Bestäm koefficienten till λ^{n-1} i $\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$. Visa att $\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) + q(\lambda)$ där q är ett polynom av grad (högst) $n - 2$. Vad är högerledets λ^{n-1}-koefficient?

Övning 3.13. Bevis eller motexempel: Om U är ett delrum till V som är invariant under *varje* operator på V så är $U = \{\mathbf{0}\}$ eller $U = V$.

Övning 3.14. Antag att S och T kommuterar. Visa att $\operatorname{Ker}(T - \lambda I)$ är ett invariant delrum till S.

Övning 3.15. Låt $T : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ vara definerad av $a + bt \mapsto b + at$. Bestäm egenvärden och egenvektorer till T.

Övning 3.16. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till fram- och bakåtskiften F resp. B på $\mathbb{R}^\infty$. (Se Exempel 2.2 för definitionen av F och B.) Vad händer om vi i stället för $\mathbb{R}^\infty$ låter F och B verka på $\mathbb{R}^\infty_0$ och $\mathbb{R}^\infty_{00}$?

Övning 3.17. Antag att $T : V \to V$ där $\dim V = 5$. Visa att om $\dim \operatorname{Ran} T = 3$ så har T högst 3 olika egenvärden. Generalisering?

Övning 3.18. Bevisa att ST och TS har samma egenvärden.

Övning 3.19. Antag att V är ett komplext vektorrum och p ett polynom. Visa att a är ett egenvärde till operatorn $p(T)$ om och endast om $a = p(\lambda)$ för något egenvärde λ till T. Är det sant för reella vektorrum?

Övning 3.20. Antag att T har $\dim V$ olika egenvärden och att varje egenvektor till T också är en egenvektor till S (inte nödvändigtvis med samma egenvärden). Visa att då kommuterar T och S.
Ledning. Vad är $ST\mathbf{u}$ och $TS\mathbf{u}$ då $\mathbf{u}$ är en egenvektor?

Övning 3.21. Låt A vara en reell matris med ett komplext egenvärde λ (dvs.$\lambda \notin \mathbb{R}$) och egenvektor $\mathbf{v}$. Visa att då är $\bar{\lambda}$ också ett egenvärde med egenvektor $\bar{\mathbf{v}}$.

Övning 3.22. Låt T vara en operator på ett femdimensionellt vektorrum med tre olika egenvärden. Ett av egenrummen är tredimensionellt. Måste T vara diagonaliserbar? Bevis eller motexempel.

Övning 3.23. Ge ett exempel på en 3×3-matris som inte är diagonaliserbar. Kan du göra exemplet "generiskt", dvs. så att ingen speciell struktur syns?

Övning 3.24. Antag att $A \neq 0$ och $A^n = 0$ för något n. Bevisa att A inte kan diagonaliseras.

Övning 3.25. (a) Låt $M_{2\times 2}$ vara vektorrummet av alla 2×2-matriser. Bestäm egenvärden och egenvektorer till operatorn $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ given av $T(A) = A^T$.

(b) Kan du lösa motsvarande problem för $n \times n$-matriser?

Förslag till svar

3.1 (b), (c), (e) och (g) är sanna, (a), (d) och (f)är falska
3.2 (a) $\lambda^2 - \lambda - 2$, $\lambda = 2, -1$ resp. multiplar av $(5, 2)$ och $(1, 1)$
(b)$(\lambda - 3)^2$, $\lambda = 3$ resp. multiplar av $(1, 1)$
(c) $-(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$, $\lambda = 1, -2$ resp. multiplar av $(1, -1, 1)$
och $\text{Span}\big((1, 0, -1), (1, -1, 0)\big)$
3.3 $\lambda = \cos\varphi \pm i \sin\varphi$, resp.$(i, 1)$ och $(1, i)$
3.13 Sant
3.15 $\lambda = \pm 1$, $1 + t$ och $1 - t$
3.16 F saknar egenvärde (i alla tre fallen). Alla λ är egenvärden till B, egenvektorer är multiplar av $(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots)$ På $\mathbb{R}_0^\infty$ är alla λ med $|\lambda| < 1$ egenvärden, och på $\mathbb{R}_{00}^\infty$ är $\lambda = 0$ det enda egenvärdet.
3.19 Falskt
3.22 Ja
3.25 (a) $\lambda = 1$, motsvarande egenrum består av alla symmetriska matriser (tredimensionellt);
$\lambda = -1$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ är en bas för E_{-1}.
(b) Ja. $\lambda = 1$, motsvarande egenrum består av alla symmetriska matriser
($n(n+1)/2$ dimensionellt); $\lambda = -1$, en bas för E_{-1} består av matriserna
$A_{ij}, j > i$ med $a_{ij} = 1$, $a_{ji} = -1$ och $a_{kl} = 0$ om $(k, l) \neq (i, j)$
(de är $n(n-1)/2$ stycken).

Kapitel 4

Tillämpningar på spektralteori

4.1 Några geometriska exempel

Exempel 4.1. Bestäm den geometriska betydelsen av avbildningen $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, där

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

En vektor $\mathbf{v}$ är egenvektor till A med egenvärdet λ om och endast om $\mathbf{v}$ är en egenvektor till $6A$ med egenvärdet 6λ. Så A och $6A$ har samma egenvektorer. Egenvärdena till $6A$ fås ur

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\text{räkna själv}) = -\lambda(\lambda-6)^2 = 0.$$

Alltså har A egenvärdena $\lambda_1 = 0$ och $\lambda_{2,3} = 1$. Låt E_0 och E_1 vara motsvarande egenrum.

En kalkyl (Gör den!) visar att $\mathbf{e}_1 = (1, 2, 1)$ är en egenvektor till egenvärdet 0.

För $\lambda = 1$ har vi

$$6A - 6I = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Så vi ser att $\mathbf{e}_2 = (1, 0, -1)$ och $\mathbf{e}_3 = (2, -1, 0)$ är två linjärt oberoende vektorer i egenrummet E_1. Observera att båda är vinkelräta mot $\mathbf{e}_1$. Så E_1 är det plan genom origo som är vinkelrät mot $\mathbf{e}_1$, dvs. planet $x + 2y + z = 0$.

Nu gäller $V = E_0 \oplus E_1$ så om $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$ gäller $A\mathbf{v} = A\mathbf{v}_0 + A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$ där $\mathbf{v}_i \in E_i$, $i = 1, 2$. Alltså är A den ortogonala projektionen på planet $x + 2y + z = 0$.

Anmärkning 4.2. Att E_0 och E_1 är vinkelräta är ingen slump. I Kapitel 6 skall vi se att det är så för alla symmetriska matriser.

I de följande exemplen skall vi studera den geometriska betydelsen av 2×2-matriser med komplexa egenvärden. Mer om detta hittar du i Lay, avsnitt 5.5.

Exempel 4.3. Låt $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ vara en reell matris. Det karakteristiska polynomet är $p(\lambda) = (a - \lambda)^2 + b^2$ och A saknar alltså reellt egenvärde om $b \neq 0$. Om $r = |(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ kan vi skriva $A = r \begin{pmatrix} \frac{a}{r} & -\frac{b}{r} \\ \frac{b}{r} & \frac{a}{r} \end{pmatrix}$. Vektorn $\frac{1}{r}(a, b)$ ligger på enhetscirkeln och det finns alltså en vinkel φ så att

$$A = r \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Så A består av en rotation sammansatt med en skalning. Banan $\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0$ ligger i en cirkulär spiral kring origo. Om $r = 1$ är banan en cirkel.

Matrisen A ovan är inte bara ett trevligt exempel, det är av grundläggande betydelse för varje reell matris med komplexa egenvärden.

Exempel 4.4. Undersök matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Vi har $p(\lambda) = (3 - \lambda)^2 + 4$ så A har egenvärdena $\lambda_\pm = 3 \pm 2i$. Egenvektorn som hör till λ_+ fås ur $\begin{pmatrix} -2i & 4 \\ -1 & -2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alltså är $\mathbf{v} = (2, i)$ en egenvektor. (Eftersom $A\bar{\mathbf{v}} = \overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}$ är $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} = (2, -i)$ en egenvektor till λ_-.)

Låt B vara basen $\mathrm{Re}\,\mathbf{v} = (2,0), \mathrm{Im}\,\mathbf{v} = (0,1)$. Vi har $[A]_B = [I]_{BS}[A]_S[I]_{SB}$. Nu är $[I]_{SB} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $[I]_{BS} = [I]_{SB}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Så

$$[A]_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$[A]_B$ är en matris av den typ som behandlades i Exempel 4.3. och i basen $\mathrm{Re}\,\mathbf{v}, \mathrm{Im}\,\mathbf{v}$ är avbildningen en sammansättning av en rotation och en skalning.

Anmärkning 4.5. Utseendet på matrisen $[A]_B$ kan också förklaras på följande sätt. Låt $\mathbf{v} = \mathrm{Re}\,\mathbf{v} + i\,\mathrm{Im}\,\mathbf{v}$ vara en egenvektor till A med egenvärdet $\lambda = a + ib$ och sätt $\mathbf{v}_R = \mathrm{Re}\,\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_I = \mathrm{Im}\,\mathbf{v}$. Då gäller $A\mathbf{v}_R = A(\frac{1}{2}(\mathbf{v} + \bar{\mathbf{v}})) = \frac{1}{2}(\lambda\mathbf{v} + \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}) = \mathrm{Re}(\lambda\mathbf{v})$. Men $\lambda\mathbf{v} = (a+ib)(\mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I) = (a\mathbf{v}_R - b\mathbf{v}_I) + i(a\mathbf{v}_I + b\mathbf{v}_R)$. Så $A\mathbf{v}_R = a\mathbf{v}_R - b\mathbf{v}_I$. På liknande sätt ser vi att $A\mathbf{v}_I = b\mathbf{v}_R + a\mathbf{v}_I$. Alltså är

$$\begin{cases} A\mathbf{v}_R & = & a\mathbf{v}_R & - & b\mathbf{v}_I \\ A\mathbf{v}_I & = & b\mathbf{v}_R & + & a\mathbf{v}_I\,. \end{cases}$$

Men detta betyder att $[A]_B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ där B är basen $B = \{\mathbf{v}_R, \mathbf{v}_I\}$.

Övning 4.1. Visa att den linjära avbildning på $\mathbb{R}^3$ som i standardbasen har matrisen

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

är ortogonal projektion på ett plan. Vilket plan?

Övning 4.2. Bestäm egenvärdena och en bas för motsvarande egenrum till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Övning 4.3. Den linjära operator på $\mathbb{R}^2$ som ges av matrisen $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ är sammansatt av en rotation och en skalning. Bestäm rotationsvinkeln φ och skalningsfaktorn r.

Övning 4.4. Bestäm som i Exempel 4.4 en bas B och en matris $[A]_B$ på formen $[A]_B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ då

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ och } (b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.2 Diskreta dynamiska system

Exempel 4.6. Ugglor äter möss.

Eftersom ugglor äter möss är det bra för ugglorna om det finns mycket möss och dåligt för mössen om det finns många ugglor. Låt u_n och m_n vara antalet ugglor i hundratal respektive antalet möss i tiotusental efter n år. En modell för att beskriva populationsförändringen är

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0,4u_n + 0,6m_n \\ m_{n+1} = -0,3u_n + 1,3m_n \end{cases}$$

eller mer kompakt

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n \text{ där } A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ -0,3 & 1,3 \end{pmatrix}.$$

Detta ger $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = A^2\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 = A^3\mathbf{x}_0$,... och $\mathbf{x}_n = A^n\mathbf{x}_0$. För att förstå populationsdynamiken återstår ”bara” att beräkna $A^n\mathbf{x}_0$.

Vi har

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 0,4-\lambda & 0,6 \\ -0,3 & 1,3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0,6 \\ 1-\lambda & 1,3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(0,7-\lambda).$$

Så nollställena är $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 0,7$. Motsvarande egenvektorer är (Räkna själv!) $\mathbf{e}_1 = (1,1)$ och $\mathbf{e}_2 = (2,1)$. Så om B är basen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ har vi $[A]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$ och $[A^n]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7^n \end{pmatrix}$. I standardbasen gäller därför $A^n = [A]^n_S = [I]_{SB}[A^n]_B[I]_{BS}$ där $[I]_{SB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nu är (Kolla det!) $[I]_{BS} =$

$[I]_{SB}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Så om t.ex. $\mathbf{x}_0 = (3,2)$ har vi

$$\mathbf{x}_n = A^n\mathbf{x}_0 = [I]_{SB}[A^n]_B[I]_{BS}\mathbf{x}_0 =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= (\text{Räkna, räkna}) = \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot 0,7^n \\ 1 + 0,7^n \end{pmatrix}$$

eller $u_n = 1 + 2 \cdot 0,7^n$ och $m_n = 1 + 0,7^n$. När $n \to \infty$ närmar sig både u_n och m_n 1 och i det långa loppet kommer det att finnas 100 ugglor och 10 000 möss i skogen.

Ett något annorlunda (och enklare) sätt att lösa problemet är att först observera att $\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ och att därför $A^n\mathbf{x}_0 = A^n(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = A^n\mathbf{e}_1 + A^n\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + 0,7^n\mathbf{e}_2 = (1 + 2 \cdot 0,7^n, 1 + 0,7^n)$.

Exempel 4.7. Beräkna A^n då $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

A har det dubbla egenvärdet $\lambda = 2$. Egenrummet E_2 är endimensionellt (det spänns av $(1,0)$) så A kan inte diagonaliseras. Men vi kan ändå enkelt beräkna A^n. Vi har $A = 2I + A - 2I = 2I + N$ där $N = A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Eftersom $N^2 = 0$ ger binomialsatsen

$$A^n = (2I+N)^n = (2I)^n + \binom{n}{1}(2I)^{n-1}N = 2^nI + n2^{n-1}N = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rekursionsekvationer av högre ordning kan reduceras till ett system av första ordningens rekursionsekvationer och lösas med ovanstående metoder.

Exempel 4.8. Lös

$$\begin{cases} x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n \\ x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = 1 \end{cases}.$$

Låt $\mathbf{x}_n = (x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$. Då gäller

$$\mathbf{x}_{n+1} = (x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}) = (x_{n+1}, x_{n+2}, 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n) \ .$$

På matrisform kan detta skrivas $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$ där $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

En kalkyl (Gör den!) visar att A har egenvärdena -1, 1 och 2 med egenvektorer $\mathbf{e}_{-1} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1)$ och $\mathbf{e}_2 = (1, 2, 4)$. Därför gäller $\mathbf{x}_0 = \dfrac{1}{2}(\mathbf{e}_{-1} + \mathbf{e}_1)$ och vi får

$$\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0 = A^n(\frac{1}{2}(\mathbf{e}_{-1} + \mathbf{e}_1)) = \frac{1}{2}((-1)^n \mathbf{e}_{-1} + 1^n \mathbf{e}_1) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + (-1)^n \mathbf{e}_{-1}) \ .$$

Så $x_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$, dvs. $x_n = 1$ när n är jämnt och $x_n = 0$ när n är udda. Detta kan man förstås också se genom att direkt med rekursionsformeln beräkna ett par x_n.

4.2.1 Stabilitet

Vi antar att operatorn A har en bas av egenvektorer $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Då har det dynamiska systemet

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$$

lösningarna

$$\mathbf{x}_n = c_1 \lambda_1^n \mathbf{e}_1 + \ldots + c_m \lambda_m^n \mathbf{e}_m$$

där c_i bestäms av startvärdet $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{e}_1 + \ldots + c_m\mathbf{e}_m$. Vi vill förstå hur lösningarna beter sig när $n \to \infty$.

Om $\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}_i$ så gäller $\mathbf{x}_n = \lambda_i^n \mathbf{e}_i$. Om $|\lambda_i| < 1$ har vi att $\mathbf{x}_n \to \mathbf{0}$, $n \to \infty$. Avtagandet är exponentiellt och vi säger att $\mathbf{e}_i$ är ett stabilt tillstånd. Om $|\lambda_i| > 1$ så växer i stället $|\mathbf{x}_n|$ exponentiellt mot oändligheten. Vi säger att $\mathbf{e}_i$ är ett instabilt tillstånd. Slutligen om $|\lambda_i| = 1$ så varken växer eller avtar $\mathbf{x}_n$.

Låt oss nu betrakta ett godtyckligt startvärde $\mathbf{x}_0$. Antag λ_i är ett dominerande egenvärde, dvs. att det har störst absolutbelopp av egenvärdena. Motsvarande egenvektor $\mathbf{e}_i$ kallas ett dominerande tillstånd. För enkelhets skull antar vi att $|\lambda_i| > |\lambda_k|$ då $k \neq i$. Om $c_i \neq 0$ kommer termen $c_i \lambda_i^n \mathbf{e}_i$ att dominera över de andra termerna och riktningen på $\mathbf{x}_n$ kommer att närma sig riktningen hos $\mathbf{e}_i$.

$\Big($Vi har $\dfrac{\mathbf{x}_n}{|\mathbf{x}_n|} \approx r_n \dfrac{\mathbf{e}_i}{|\mathbf{e}_i|}$ där $|r_n| = 1$. I det reella fallet närmar sig $\mathbf{x}_n$ den linje genom origo som bestäms av $\mathbf{e}_i$. I det komplexa fallet närmar sig $\mathbf{x}_n$ den *komplexa* linje som bestäms av $\mathbf{e}_i$, dvs. alla vektorer i $\mathbb{C}^m$ som kan skrivas $z\mathbf{e}_i, z \in \mathbb{C}.\Big)$

Om alla egenvärden uppfyller $|\lambda_k| < 1$ så gäller $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$, för alla startvärden $\mathbf{x}_0$. Det dynamiska systemet är stabilt. Om något egenvärde uppfyller $|\lambda_k| > 1$ så kommer $|\mathbf{x}_n| \to \infty$, $n \to \infty$, för nästan alla startvärden, systemet är instabilt. Konvergensen sker längs den riktning som bestäms av den dominerande egenvektorn $\mathbf{e}_i$.

Övning 4.5. Låt $A = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Bestäm $\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0$. Beskriv kvalitativt vad som händer för stora n.

Övning 4.6. Låt $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestäm $\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0$. Beskriv kvalitativt vad som händer för stora n.

Övning 4.7. I den förtrollade skogen bor drakar och gripar. Deras antal år n uppfyller

$$\begin{cases} d_{n+1} &= 1,5 d_n + g_n \\ g_{n+1} &= d_n \end{cases}.$$

Vad blir populationen efter 25 år om det från början fanns 25 drakar och inga gripar? Hur blir det efter ett stort antal år? Vad blir förhållandet mellan drakar och gripar?

Övning 4.8. I skogen finns rådjur, hundra vuxna och hundra kid. Varje år överlever 50% av kiden och blir vuxna, 50% dör. De vuxna rådjuren föder i genomsnitt $0,6$ kid (dvs. $1,2$ per par), och 70% av de vuxna rådjuren överlever till nästa år. Hur många kid och hur många vuxna rådjur finns det tio år senare?

Övning 4.9. Undersök stabiliteten hos systemet $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$ då $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Övning 4.10. Undersök stabiliteten hos systemet $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$ då $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Övning 4.11. Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. För vilka (reella) värden på k är systemet $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$ stabilt? När finns det ett instabilt tillstånd? När finns det två?

Övning 4.12. Vad bli x_n om $x_0 = x_1 = 0, x_2 = 1$ i Exempel 4.8?

Övning 4.13. En trädgårdsmästare skall lägga en gång med cementplattor. Gången skall vara en fot bred. Han har tre slags plattor. En är omönstrad och kvadratisk med sidan en fot, två är rektangulära med sidorna en respektive två fot. En av dessa är omönstrad, den andra mönstrad. Hur många olika gångar kan han lägga som är n fot långa?

Övning 4.14. Fibonacciföljden definieras av $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n = 1, 2, 3, \ldots$, $F_1 = F_2 = 1$. Bestäm F_n. (För att förenkla räkningarna kan det vara lämpligt att starta från $n = 0$ genom att lägga till $F_0 = 0$.)

Övning 4.15. Låt $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Beräkna A^N.

4.3 Linjära differentialekvationer

4.3.1 Inledning

Ett system av första ordningens ordinära differentialekvationer är ett ekvationssystem av formen

$$\begin{cases} x_1' = F_1(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n' = F_n(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \end{cases},$$

eller mer kompakt

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) .$$

Här är $\mathbf{x}(t)$ en okänd och $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ en känd vektorvärd funktion. Om vi dessutom har ett begynnelsevillkor $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ (där t_0 är en given tidpunkt och $\mathbf{x}_0$ är en given vektor) säger vi att vi har ett begynnelsevärdesproblem.

En viktigt resultat i teorin för ordinära differentialekvationer är följande sats.

Sats 4.9. *Antag $\mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ är en kontinuerlig funktion i en öppen mängd Ω och att $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$. Antag dessutom att för fixt t så är $\mathbf{y} \mapsto F(t, \mathbf{y})$ en deriverbar funktion. Då har begynnelsevärdesproblemet*

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

en entydig lösning $\mathbf{x}(t)$ som är definierad i en omgivning av $(t_0, \mathbf{x}_0)$.

Beviset av detta och mer allmänna satser hör hemma i en kurs om ordinära differentialekvationer och vi bevisar den inte här.

4.3.2 Linjära ekvationer med konstanta koefficienter

I kursen skall vi behandla linjära, homogena första ordningens ekvationer med konstanta koefficienter, dvs. ekvationer av typen

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} . \tag{4.2}$$

Här är A en fix kvadratisk matris, $\mathbf{x}_0$ en given begynnelsevektor, och $\mathbf{x}(t)$ en vektorvärd funktion som skall bestämmas.

Anmärkning 4.10. Det är ingen inskränkning att anta att $t_0 = 0$ eftersom om $\mathbf{x}(t)$ löser (4.2), så löser $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t - t_0)$ ekvationen

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} .$$

Vi antar först att A är diagonaliserbar. Eftersom den endimensionella ekvationen $x' = ax$, $x(0) = x_0$, har lösningen $e^{at}x_0$, är det naturligt att leta efter lösningar av formen $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u}$, där $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ är en konstant vektor och λ ett tal. Vi ser att $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u}$ är en lösning till $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ om och endast om $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, dvs. om och endast om λ är ett egenvärde till A och $\mathbf{u}$ en motsvarande egenvektor.

Om A kan diagonaliseras så har A en bas av egenvektorer $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ med motsvarande egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Eftersom $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ är en bas så finns entydiga $c_1, \ldots, c_n$ så att $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{e}_1 + \ldots + c_n\mathbf{e}_n$, och $c_1(t), \ldots, c_n(t)$ med

$$\mathbf{x}(t) = c_1(t)\mathbf{e}_1 + \ldots + c_n(t)\mathbf{e}_n .$$

Nu gäller

$$\mathbf{x}'(t) = c_1'(t)\mathbf{e}_1 + \ldots + c_n'(t)\mathbf{e}_n$$

och

$$A\mathbf{x}(t) = c_1(t)\lambda_1\mathbf{e}_1 + \ldots + c_n(t)\lambda_n\mathbf{e}_n .$$

Så ekvationen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ ger det isärkopplade systemet

$$\begin{cases} c_1'(t) = \lambda_1 c_1(t), c_1(0) = c_1 \\ \vdots \\ c_n'(t) = \lambda_n c_n(t), c_n(0) = c_n \end{cases} ,$$

med lösningarna $c_i(t) = c_i e^{\lambda_i} t$. Alltså är

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{e}_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{e}_n \tag{4.3}$$

den sökta lösningen.

Exempel 4.11. Antag att ett visst radioaktivt material A sönderfaller till materialet B med intensiteten a. Material B sönderfaller i sin tur till materialet C med intensiteten b. Materialet C är stabilt. Hur mycket av materialen A och B finns det efter t dygn om det från början fanns 1 kilo av materialet A. Låt x_1 och x_2 vara mängden av material A respektive B. Då gäller

$$\begin{cases} x_1' = -ax_1 \\ x_2' = ax_1 - bx_2 \end{cases} \quad \text{eller på matrisform } \mathbf{x}' = A\mathbf{x} \ ,$$

där

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ a & -b \end{pmatrix} .$$

Om $a \neq b$ har A egenvärdena $-a$ och $-b$ med egenvektorerna $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} b-a \\ a \end{pmatrix}$ och

$$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (Räkna själv!). Begynnelsevillkoret är

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{b-a}\mathbf{e}_1 - \frac{a}{b-a}\mathbf{e}_2 \ .$$

Enligt resonomanget ovan får vi lösningen

$$\mathbf{x}(t) = \frac{e^{-at}}{b-a}\mathbf{e}_1 - \frac{ae^{-bt}}{b-a}\mathbf{e}_2 \ .$$

eller

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-at} \\ x_2(t) = \frac{a}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt}) \end{cases} .$$

I denna lösning har vi antagit att $a \neq b$. Om $a = b$ är A inte diagonaliserbar och vi måste resonera annorlunda. En möjlighet är att störa systemet en aning genom att ersätta $b = a$ med $b = a + \epsilon$. Som ovan får vi

$$\begin{cases} x_{1,\epsilon}(t) = e^{-at} \\ x_{2,\epsilon}(t) = \frac{a}{\epsilon}(e^{-at} - e^{-(a+\epsilon)t}) \end{cases} .$$

Nu låter vi $\epsilon \to 0$. För fixt t gäller

$$\frac{a}{\epsilon}(e^{-at} - e^{-(a+\epsilon)t}) = ate^{-at}\frac{e^{-\epsilon t} - 1}{-\epsilon t} \to ate^{-at}, \epsilon \to 0 \ .$$

Här har vi använt standardgränsvärdet $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. Det går att visa att då $\epsilon \to 0$ konvergerar lösningen $\mathbf{x}_\epsilon(t)$ mot lösningen i fallet $a = b$. Så

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-at} \\ x_2(t) = ate^{-at} \end{cases} ,$$

som löser ekvationen då $b = a$. Kontrollera gärna detta genom att stoppa in i differentialekvationen.

Anmärkning 4.12. I detta Exempel är kopplingen så enkel (x_1' beror inte på x_2) att vi med envariabelmetoder direkt kan lösa ut x_1, stoppa in resultatet i den andra ekvationen och bestämma x_2. Detta fungerar oavsett om $a = b$ eller ej.

I nästa avsnitt skall vi studera en annan lösningsmetod som fungerar även om A inte är diagonaliserbar.

4.3.3 Matrisexponentialfunktionen

Differentialekvationen $x' = ax$, $x(0) = x_0$ har lösningen $x(t) = x_0 e^{ta}$ En djärv gissning är att därför är lösningen till (4.2) ges av $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0$. Det första problemet med denna gissning är att definiera e^{tA}.

När $x \in \mathbb{R}$ finns det några olika sätt att definiera exponentialfunktionen.

1. e^x är talet e multiplicerat med sig själv x gånger.
2. $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
3. e^x är lösningen till differentialekvationen $x' = x,\ x(0) = 1$.
4. e^x är inversen till $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$. (Fy!)

För matriser är 1. och 4. nonsens. Däremot fungerar både 2. och 3. Vi definierar e^{tA} genom 2. och sen bevisar vi motsvarigheten till 3.

Definition 4.13. *Låt A vara en kvadratisk matris. Då är*

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} .$$

För att detta skall fungera behöver vi visa att serien konvergerar. Antag att A är en matris med m rader och kolonner. Låt a_{ij} och a_{ij}^n beteckna elementet på plats ij i A respektive A^n.

Den N-te partialsumman är

$$S_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} t^n A^n,$$

som är en matris med element

$$s_{ij}^N = \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n a_{ij}^n}{n!} .$$

Vi skall visa s_{ij}^N konvergerar för all i och j. Det medför att $e^{tA} = \lim_{N\to\infty} S_N$ existerar och e^{tA} är definierat.

Vi skall alltså visa att potensserierna $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n a_{ij}^n}{n!}$ konvergerar för alla $t \in \mathbb{R}$. Sätt $M = \max_{i,j} |a_{ij}|$. Då gäller

$$|a_{ij}^2| = |\sum_{k=1}^{m} a_{ik} a_{kj}| \leq \sum_{k=1}^{m} |a_{ik}||a_{kj}| \leq \sum_{k=1}^{m} M^2 = mM^2 \leq m^2 M^2,$$
$$|a_{ij}^3| = |\sum_{k=1}^{m} a_{ik}^2 a_{kj}| \leq \sum_{k=1}^{m} |a_{ik}^2||a_{kj}| \leq \sum_{k=1}^{m} m^2 M^3 = m^3 M^3,$$

och allmänt

$$|a_{ij}^n| \leq (mM)^n.$$

Uppskattningen ger oss nu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{t^n a_{ij}^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|t|mM)^n}{n!} = e^{|t|mM} < \infty .$$

Alltså är potensserierna absolutkonvergenta för alla $t \in \mathbb{R}$.

Nu till 3.

Sats 4.14. $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0$ *är en lösning till differentialekvationen*

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} .$$

Bevis. Eftersom potensserier kan deriveras termvis har vi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{tA} = \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n A^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\frac{t^n A^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1}\frac{A^n}{n!} \\ &= A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}A^{n-1}}{(n-1)!} = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n A^n}{n!} = Ae^{tA} . \end{aligned}$$

Så $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \frac{d}{dt}e^{tA}\mathbf{x}_0 = Ae^{tA}\mathbf{x}_0 = A\mathbf{x}(t)$ och $\mathbf{x}(0) = e^0\mathbf{x}_0 = I\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$. □

Anmärkning 4.15. Om vi sätter $t = 1$ får vi att $e^A = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$ så e^A är definierad för varje matris A. Att vi valde att definiera e^{tA} var för att beviset av Sats 4.14 skulle bli lätt.

Låt oss notera några egenskaper hos e^A.

Sats 4.16. *Om A och B kommuterar, dvs. $AB = BA$, så gäller $e^{A+B} = e^A e^B$.*

Bevis. Ett sätt att bevisa formeln är att använda potensserieframställningen av e^{A+B}. Observera att eftersom A och B kommuterar så kan vi beräkna $(A+B)^k$ med binomialsatsen, $(A+B)^k = \sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}A^n B^{k-n}$. Vi får

$$\begin{aligned} e^A e^B = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B^m}{m!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A^n B^m}{n!m!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n+m=k}\frac{A^n B^m}{n!m!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{A^n B^{k-n}}{n!(k-n)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}A^n B^{k-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(A+B)^k = e^{(A+B)} . \end{aligned}$$

□

Anmärkning 4.17. Man behöver inte genomföra räkningarna. Det är sant att $e^{a+b} = e^a e^b$ när a och b är reella tal. När A och B kommuterar gäller samma räknelagar för A och B som för a och b så räkningen ”måste” stämma.

För ett alternativ bevis, se Övning 4.22.

Från Sats 4.16 får vi

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA},\ (e^A)^{-1} = e^{-A} \text{ och } (e^{tA})^{-1} = e^{-tA}\ .$$

Ett annat sätt att bevisa det första påståendet är med Sats 4.14. Fixera s och låt $\mathbf{x}_1(t) = e^{(t+s)A}\mathbf{x}_0$ och $\mathbf{x}_2(t) = e^{tA}e^{sA}\mathbf{x}_0$. Då uppfyller både $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ ekvationen

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = e^{sA}\mathbf{x}_0 \end{cases}.$$

Enligt Sats 4.9 är lösningen entydig, och alltså är $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t)$ dvs. $e^{(t+s)A}\mathbf{x}_0 = e^{tA}e^{sA}\mathbf{x}_0$ och eftersom $\mathbf{x}_0$ kan väljas godtyckligt följer $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$.

Om A kan diagonaliseras är det enkelt att beräkna e^{tA}. Låt B vara en bas av egenvektorer $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ med motsvarande egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Då gäller

$$[A]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix} \text{ och } [A^n]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_m^n \end{pmatrix}.$$

Så

$$[e^{tA}]_B = e^{t[A]_B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}[A]_B^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_m^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & e^{t\lambda_m} \end{pmatrix}.$$

Eftersom $[\mathbf{x}_0]_B = (c_1, \ldots, c_m)$ ger detta $[\mathbf{x}(t)]_B = e^{t[T]_B}[\mathbf{x}_0]_B = (c_1e^{t\lambda_1}, \ldots, c_me^{t\lambda_m})$ eller $\mathbf{x}(t) = c_1e^{t\lambda_1}\mathbf{e}_1 + \cdots + c_me^{t\lambda_m}\mathbf{e}_m$ och vi har åter sett att lösningen ges av (4.3).

Exempel 4.18. För att lösa differentialekvationen

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = (2, 0) \end{cases} \text{ där } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

observerar vi först att A har egenvärdena 1 och -1 med egenvektorerna $\mathbf{e}_1 = (1, -1)$ respektive $\mathbf{e}_2 = (1, 1)$. Vi observerar också att $\mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ och låter $\mathbf{x}(t) = a(t)\mathbf{e}_1 + b(t)\mathbf{e}_2$. Då gäller

$$\mathbf{x}'(t) = a'(t)\mathbf{e}_1 + b'(t)\mathbf{e}_2 \text{ och } A\mathbf{x}(t) = a(t)\mathbf{e}_1 - b(t)\mathbf{e}_2 \, .$$

Så vi får

$$\begin{cases} a'(t) = a(t) \\ a(0) = 1 \end{cases} \text{och} \begin{cases} b'(t) = -b(t) \\ b(0) = 1 \end{cases} .$$

Lösningarna är $a(t) = e^t$ och $b(t) = e^{-t}$ och vi får $\mathbf{x}(t) = e^t\mathbf{e}_1 + e^{-t}\mathbf{e}_2 = (e^t + e^{-t}, e^t - e^{-t})$.

Exempel 4.19. Skall vi i stället lösa differentialekvationen

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = (1, 1) \end{cases} \text{där} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

observerar vi först att A har det dubbla egenvärdet 3 men inte är diagonaliserbar (Varför då?). Vi vill därför beräkna e^{tA}. Vi skriver $A = 3I + (A - 3I) = 3I + N$ där $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vi har $N^2 = 0$ och alltså $N^n = 0$ när $n \geq 2$. Så

$$e^{tN} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{1} \frac{t^n A^n}{n!} = I + tA \, .$$

Detta ger

$$e^{tA} = e^{3tI + tN} = e^{3tI}e^{tN} = e^{3t}(I + tN) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och

$$\mathbf{x}(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{3t}(1 + t, 1) \, .$$

Anmärkning 4.20. Att det gick så lätt att beräkna e^{tA} berodde på att $A - \lambda I$ var nilpotent, dvs. någon potens (i det här fallet 2) av $A - \lambda I$ försvinner. Man kan i allmänhet dela upp en operator i invarianta delrum med denna egenskap, så man behöver bara beräkna ändligt många termer i serien för e^{tA}. Mer om detta i Kapitel 8.

Exempel 4.12. (Forts.) Vi tittar åter på exemplet med radioaktivt sönderfall, dvs.

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \text{ där } A = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ a & -b \end{pmatrix} .$$

Om $a \neq b$ har A egenvärdena $-a$ och $-b$ med egenvektorerna $\begin{pmatrix} b-a \\ a \end{pmatrix}$ respektive $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. I denna bas B gäller

$$[e^{tA}]_B = e^{t[A]_B} = \begin{pmatrix} e^{-at} & 0 \\ 0 & e^{-bt} \end{pmatrix} \text{ och } [\mathbf{x}(t)]_B = [e^{tA}]_B[\mathbf{x}_0]_B .$$

Nu är $[\mathbf{x}_0]_B = [I]_{BS}[\mathbf{x}_0]_S$ och $[\mathbf{x}_0] = [I]_{SB}[\mathbf{x}_0]_B$. Vi har

$$[I]_{SB} = \begin{pmatrix} b-a & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \text{ och en kalkyl ger } [I]_{BS} = [I]_{SB}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b-a} & 0 \\ -\frac{a}{b-a} & 1 \end{pmatrix} .$$

Detta ger

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}(t)]_S = [I]_{SB}[\mathbf{x}(t)]_B &= [I]_{SB}[e^{tA}]_B[\mathbf{x}_0]_B \\ &= [I]_{SB}[e^{tA}]_B[I]_{BS}[\mathbf{x}_0]_S = \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} b-a & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-at} & 0 \\ 0 & e^{-bt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{b-a} & 0 \\ -\frac{a}{b-a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (\text{Räkna själv! }) = \begin{pmatrix} e^{-at} \\ \frac{a}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right) \end{pmatrix} .$$

När $b = a$ har vi $A = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ a & -a \end{pmatrix}$ som har det dubbla egenvärdet $-a$, men inte är diagonaliserbar. Vi låter $A = -aI + N$ där $N = A + aI = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Då är $N^2 = 0$ och

$$e^{tA} = e^{t(-aI+N)} = e^{-at}e^{tN} = e^{-at}(I + tN) = e^{-at} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ at & 1 \end{pmatrix} .$$

Anmärkning 4.21. En linjär differentialekvation av n-te ordningen

$$y^{(n)} + c_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + c_1 y' + c_0 y = 0$$

kan skrivas om som ett första ordningens system. Om vi inför $x_1 = y$, $x_2 = y', \ldots, x_n = y^{(n-1)}$ får vi systemet (Varför då?) $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \ldots & 1 \\ -c_0 & -c_1 & & \ldots & -c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Så med denna omskrivning kan vi använda metoderna i detta kapitel för att lösa differentialekvationer av högre ordning. Omskrivningen används också när man löser differentialekvationer i MATLAB, och den kan också användas för att visa satser om differentialekvationer av högre ordning.

Anmärkning 4.22. När A är diagonaliserbar ger vårt första argument både existens och entydighet hos lösningarna. Om A inte är diagonaliserbar visade vi bara att $e^{tA}\mathbf{x}_0$ var en lösning, inte att det var den enda lösningen. För den teoretiskt intresserade läsaren ger vi här ett bevis för detta.

Bevis av entydigheten av lösningar till (4.2). För att idén i beviset skall bli klar börjar vi med att ge ett bevis av entydigheten då $n = 1$ som enkelt kan generaliseras till det allmänna fallet.

Genom att betrakta skillnaden mellan två lösningar ser vi att det räcker att visa att den enda lösningen till

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

är $x(t) = 0$.

Låt $\delta = \dfrac{1}{2|a|}$. (Om $a = 0$ kan vi låta $\delta = 1$ eller observera att fallet $a = 0$ är trivialt.) Låt $m = \max\{|x(t)|; |t| \leq \delta\}$. Ekvationen $x'(t) = ax(t)$ ger

$$x(t) = \int_0^t x'(s)ds = \int_0^t ax(s)ds\ .$$

Så om $|t| \leq \delta$ har vi

$$|x(t)| \leq m|a|\,|t| \leq m|a|\delta = \frac{1}{2}m\ .$$

Detta ger $m = \max_{|t|\leq\delta} |x(t)| \leq \frac{1}{2}m$ och $m = 0$. Alltså är $x(t) = 0$ då $|t| \leq \delta$. Vi kan nu upprepa argumentet med startpunkter $t_0 \pm \delta$ och får att $x(t) = 0$ då $|t| \leq 2\delta$ osv. Vi får $x(t) = 0$ för alla t.

I vektorfallet skall vi visa att om

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \end{cases}$$

så är $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ för alla t.

Låt $A = (a_{ij})$, $M = \max_{ij} |a_{ij}|$, $\delta = \frac{1}{2nM}$, $m_i = \max\{|x_i(t)|; |t| \leq \delta\}$ och $m = \max_i m_i$. Då gäller

$$x_i(t) = \int_0^t x_i'(s)ds = \int_0^t (A\mathbf{x}(s))_i ds$$

där $(A\mathbf{x}(s))_i$ är den i-te komponenten i $A\mathbf{x}(s)$. Om $|s| \leq \delta$ gäller $|(A\mathbf{x}(s))_i| = \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(s)\right| \leq \sum_{j=1}^n Mm = nMm$. Så om $|t| \leq \delta$ får vi

$$|x_i(t)| \leq nMm\delta = \frac{1}{2}m \; .$$

Som ovan ger detta $m \leq \frac{1}{2}m$, dvs. $m = 0$. Resten av argumentet är precis som i det endimensionella fallet. □

4.3.4 Stabilitet

Vi antar att matrisen A har en bas av egenvektorer $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Då har ekvationen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ lösningarna

$$\mathbf{x}_n = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{e}_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{e}_m$$

där c_i bestäms av startvärdet $\mathbf{x}_0$.

Eftersom $|e^{\lambda t}| = e^{\lambda_R t}$ där $\lambda_R = \mathrm{Re}\lambda$ beror uppförandet hos $e^{\lambda t}$ för stora t på om λ_R är positivt, negativt eller noll. Om vi startar i en egenvektor vars egenvärde har positiv realdel kommer lösningen att växa exponentiellt. Om egenvärdet har negativt realdel avtar lösningen exponentiellt. Om realdelen är noll är lösningen begränsad och (om $\lambda \neq 0$) oscillerande.

Precis som i det diskreta fallet kommer en allmän lösning att domineras av en term. Nu är det dominerande egenvärdet det egenvärde som har störst realdel. Om *något* egenvärde har positiv realdel kommer nästan alla startvärden ha lösningar som växer då $t \to \infty$, systemet är instabilt. Om *alla* egenvärdena har negativ realdel är systemet stabilt.

Övning 4.16. Lös differentialekvationen $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(0) = (3, 2)$ då

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ och } (b)\ A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Är systemen stabila? Hur ser banorna ut?

Övning 4.17. Gör ett variabelbyte som kopplar isär ekvationerna $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ till $\mathbf{y}'(t) = D\mathbf{y}(t)$ där D är en diagonalmatris för matriserna i Övning 4.16. Vad blir basen och D?

Övning 4.18. Bestäm den allmänna lösningen till diferentialekvationen $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ då

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ och } (b)\ A = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Beskriv banorna.

Varning. Egenvärdena är komplexa.

Övning 4.19. Beräkna e^{tA} då $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Övning 4.20. Beräkna e^{tA}, då

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)}\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \text{(c)}\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Övning 4.21. Låt $A(t)$ och $B(t)$ vara deriverbara matriser (av lämplig storlek). Visa att då gäller

$$\frac{d}{dt}(A(t)B(t)) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)\ .$$

Övning 4.22. Försök visa att om A och B kommuterar så gäller $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ genom att visa att $e^{t(A+B)}\mathbf{x}_0$ och $e^{tA}e^{tB}\mathbf{x}_0$ uppfyller samma differentialekvation (Vilken?).

Övning 4.23. Antag att $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ för alla t. Visa att då kommuterar A och B Ledning. Derivera $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ två gånger och sätt $t = 0$

4.3.5 Ekvationen $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = A\mathbf{x}$

I det här avsnittet skall vi studera differentialekvationen

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = A\mathbf{x}\ . \tag{4.4}$$

Ekvationen är viktig för tillämpningar i fysik på grund av Newtons andra lag, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Här är $\mathbf{F}$ kraften som påverkar en partikel, m är partikelns massa och $\mathbf{a}$ betecknar accelerationen. Så om $\mathbf{x}(t)$ är läget hos en partikel som påverkas av en kraft $\mathbf{F}$ så gäller $m\mathbf{x}'' = m\mathbf{a} = \mathbf{F}$.

Ett sätt att försöka lösa ekvation (4.4) är att använda metoden i Anmärkning 4.21. Men om A är en matris av ordning n kommer denna metod att ge ett första ordningens ekvationssystem där matrisen i högerledet är $2n \times 2n$ vilket leder till krångliga räkningar.

Vi väljer därför att använda en annan metod. Vi börjar med det skalära fallet, $y'' = \alpha y$. Ni har säkert sett hur man löser en sådan differentialekvation i någon analyskurs men här ger vi en lösning som bygger på Anmärkning 4.21.

Låt $x_1 = y$ och $x_2 = y'$. Då gäller $x_1' = x_2$ och $x_2' = y'' = \alpha y = \alpha x_1$. Om $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ kan detta skrivas

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \text{ där } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} .$$

Matrisen A har det karakteristiska polynomet $p(\lambda) = \lambda^2 - \alpha$. Nu finns tre olika möjligheter.

Fall 1: $\alpha = 0$. Då gäller $y(t) = At+B$ vilket följer direkt från $y'' = \alpha y = 0$.

Fall 2: $\alpha > 0$. Då är egenvärdena $\lambda_\pm = \pm\sqrt{\alpha}$ och egenvektorerna $\mathbf{e}_\pm = (1, \pm\sqrt{\alpha})$. Så om $x(0) = A\mathbf{e}_+ + B\mathbf{e}_-$ (där A och B bestäms av lämpliga begynnelsevärden) så blir lösningen $\mathbf{x}(t) = Ae^{t\sqrt{\alpha}}\mathbf{e}_+ + Be^{-t\sqrt{\alpha}}\mathbf{e}_-$. Speciellt gäller

$$y(t) = x_1(t) = Ae^{t\sqrt{\alpha}} + Be^{-t\sqrt{\alpha}} .$$

Fall 3: $\alpha < 0$. Låt $a = -\alpha$. Då är egenvärdena $\lambda_\pm = \pm i\sqrt{a}$ och egenvektorerna $\mathbf{e}_\pm = (1, \pm i\sqrt{a})$. Så om $x(0) = A\mathbf{e}_+ + B\mathbf{e}_-$ så blir lösningen $\mathbf{x}(t) = Ae^{it\sqrt{a}}\mathbf{e}_+ + Be^{-it\sqrt{a}}\mathbf{e}_-$. Speciellt gäller

$$y(t) = x_1(t) = Ae^{it\sqrt{a}} + Be^{-it\sqrt{a}} .$$

Med hjälp av Eulers formler kan detta skrivas om som

$$y(t) = A_1 \sin t\sqrt{a} + B_1 \cos t\sqrt{a} .$$

Med hjälp av ytterligare några trigonometriska formler får vi att $y(t) = A_0 \sin(t\sqrt{a} + \varphi_0)$ där man tydligt ser att $y(t)$ är en fasförskjuten sinusvåg.

För att lösa $\mathbf{x}'' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}_1$, antar vi att A är diagonaliserbar. Då finns en bas av egenvektorer $\mathbf{e}_i$ med egenvärdena λ_i. Om vi sätter $\mathbf{x}(t) = a_1(t)\mathbf{e}_1 + \ldots + a_n(t)\mathbf{e}_n$, så gäller

$$\mathbf{x}''(t) = a_1''(t)\mathbf{e}_1 + \ldots + a_n''(t)\mathbf{e}_n \text{ och } A\mathbf{x}(t) = a_1(t)\lambda_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_n(t)\lambda_n\mathbf{e}_n .$$

Så det kopplade ekvationssystemet $\mathbf{x}'' = A\mathbf{x}$ är ekvivalent med de n stycken isärkopplade skalära ekvationerna

$$a_i''(t) = \lambda_i a_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, n\ .$$

Begynnelsevärdena $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}_1$ ger två entydigt lösbara linjära ekvationssytem för begynnelsevärdena $a_i(0)$ och $a_i'(0)$. Vi låter $a_i(t)$ vara den entydiga lösningen till $a_i''(t) = \lambda_i a_i(t)$ med dessa begynnelsevillkor. Då är $\mathbf{x}(t) = a_1(t)\mathbf{e}_1 + \ldots + a_n(t)\mathbf{e}_n$ den sökta lösningen till $\mathbf{x}'' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}_1$.

Exempel 4.23 (En fysikalisk tillämpning.)**.** Betrakta en partikel som hänger i en elastisk fjäder. Hookes lag säger att kraften i en elastisk fjäder är direkt proportionell mot partikelns avvikelse från fjäderns naturliga längd. Om $x(t)$ är partikelns avvikelse från den naturliga längden vid tiden så gäller alltså $F(t) = -kx(t)$ där k är den så kallade fjäderkonstanten. Tillsammans med Newtons andra lag, $F(t) = ma$ leder detta till ekvationen $x''(t) = -\frac{k}{m}x(t)$ och partikeln utför en sinussvängning.

Låt oss nu betrakta ett mer intressant exempel. Vi antar att vi har två partiklar med (för enkelhets skull) massan 1, och tre fjädrar.Två av fjädrarna är i ena ändan fästa vid var sin vägg. Dessa fjädrar har (igen för enkelhets skull) båda fjäderkonstanten 1. Mellan partiklarna sitter den tredje fjädern som har fjäderkonstanten k. Avståndet mellan väggarna är lika med summan av de tre fjädrarnas naturliga längd. (Rita figur!) Antag att vi flyttar den ena partikeln 1 cm. Vad händer?

Låt $x_1(t)$ och är $x_2(t)$ vara två partiklarnas avvikelse från jämviktsläget. Båda partiklarna påverkas av två fjädrar. Hookes lag ger att den första partikeln påverkas av $F_1 = -x_1+k(x_2-x_1)$ och den andra av $F_1 = -x_2-k(x_2-x_1)$. Så vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1'' &= & -x_1 + k(x_2 - x_1) &= & -(1+k)x_1 + kx_2 \\ x_2'' &= & -x_2 - k(x_2 - x_1) &= & kx_1 - (1+k)x_2 \end{cases} .$$

På matrisform kan detta skrivas

$$\mathbf{x}'' = A\mathbf{x} \text{ där } A = \begin{pmatrix} -(1+k) & k \\ k & -(1+k) \end{pmatrix} .$$

Det karakteristiska polynomet till till A är $p(\lambda) = (\lambda + 1 + k)^2 - k^2$. Så egenvärdena blir $\lambda = -1$ och $\lambda = -1 - 2k$. Vektorn $\mathbf{e}_1 = (1, 1)$ är en egenvektor till egenvärdet -1 och $\mathbf{e}_2 = (1, -1)$ är en egenvektor till egenvärdet $-1 - 2k$. (Kontrollera detta.)

Vi skriver $\mathbf{x}(t) = a_1(t)\mathbf{e}_1 + a_2(t)\mathbf{e}_2$. Begynnelsevillkoren $\mathbf{x}(0) = (1,0)$, $\mathbf{x}'(0) = \mathbf{0}$ ger $a_1(0)\mathbf{e}_1 + a_2(0)\mathbf{e}_2 = (1,0)$ och $a_1'(0)\mathbf{e}_1 + a_2'(0)\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$ med lösningen $a_1(0) = a_2(0) = \frac{1}{2}$ och $a_1'(0) = a_2'(0) = 0$. Detta ger de två differentialekvationerna

$$\begin{cases} a_1'' = -a_1 \\ a_1(0) = \frac{1}{2}, a_1'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} a_2'' = -(1+2k)a_1 \\ a_2(0) = \frac{1}{2}, a_2'(0) = 0 \end{cases}.$$

Ekvationen $a_1'' = -a_1$ har den allmänna lösningen $a_1(t) = A\cos t + B\sin t$ och begynnelsevillkoret ger $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$ och alltså är $a_1(t) = \frac{1}{2}\cos t$. Ekvationen $a_2'' = -(1+2k)a_2$ har den allmänna lösningen $a_2(t) = A\cos(\sqrt{1+2k}\,t) + B\sin(\sqrt{1+2k}\,t)$. Begynnelsevillkoret ger $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$ och $a_2(t) = \frac{1}{2}\cos(\sqrt{1+2k}\,t)$.

Detta ger $\mathbf{x}(t) = \dfrac{1}{2}\Big(\cos t\,(1,1) + \cos(\sqrt{1+2k}\,t)\,(1,-1)\Big)$ eller

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}\Big(\cos t + \cos(\sqrt{1+2k}\,t)\Big) \\ x_2(t) = \frac{1}{2}\Big(\cos t - \cos(\sqrt{1+2k}\,t)\Big) \end{cases}.$$

Fundera gärna på hur partiklarna rör sig för olika värden på k, speciellt då k är liten.

Övning 4.24. Lös differentialekvationen $\mathbf{x}'' = A\mathbf{x}$ där $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = (1,0)$ och $\mathbf{x}'(0) = (0,1)$.

Övning 4.25. Lös differentialekvationen $\mathbf{x}'' = A\mathbf{x}$ där $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = (1,0)$ och $\mathbf{x}'(0) = (0,1)$.

Förslag till svar

4.1 $x - z = 0$

4.2 $2 + 3i$ och $(1 - 3i, 2)$, respektive $2 - i$ och $(1 + 3i, 2)$

4.3 $\varphi = \frac{\pi}{6}, r = 2$

4.4 (a) $(-1,1)$ och $(-1,0)$; $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

(b) $(1,2)$ och $(3,0)$; $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

4.5 $\mathbf{x}_n = (3\cos(n\theta) - 4\sin(n\theta), 3\sin(n\theta) + 4\cos(n\theta))$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

4.6 $\mathbf{x}_n = \big(5^n + 2^{n+1}, 5^n - 2^n, 5^n - 2^n\big)$

4.7 $(d_n, g_n) = \big(20 \cdot 2^n + 5(-\frac{1}{2})^n, 10 \cdot 2^n - 10(-\frac{1}{2})^n\big)$, $d_n/g_n \to 2$

4.8 $69,2$ och $115,4$
4.9 Instabilt, men $\mathbf{x}_n \to \mathbf{0}$ om $\mathbf{x}_0$ är parallell med $(-1-\sqrt{5}, 2)$.
4.10 Instabilt. $|\mathbf{x}_n| \to \infty$ utom då $\mathbf{x}_0 = t(-2,1)$.
4.11 Stabilt om $-1 < k < 0$. Instabilt om $k < -1$ eller $k > 0$.
4.12 $\dfrac{1}{6}\left(2^{n+1} - 3 + (-1)^n\right)$

4.13 $\frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n)$ stycken.

4.14 $F_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\right)$.

4.15 $\begin{pmatrix} 2^N(1+N) & -N2^{N-1} \\ 4N2^{N-1} & 2^N(1-N) \end{pmatrix}$

4.16 (a) $-\frac{5}{2}(-3,1)e^t + \frac{9}{2}(-1,1)e^{-t}$, instabilt
(b) $-\frac{1}{2}(1,3)e^{4t} + \frac{7}{2}(1,1)e^{6t}$, instabilt

4.17 (a)$(3,-1)$, $(1,-1)$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,
(b) $(1,3)$, $(1,1)$; $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$,

4.18 (a) $c_1(1-i,1)e^{(-2+i)t} + c_2(1+i,1)e^{(-2-i)t}$, spiraler in mot origo
(b) $c_1(-3+3i,2)e^{3it} + c_2(-3-3i,2)e^{-3it}$, ellipser kring origo

4.19 $\begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & 2(e^{3t} - e^{2t}) \\ e^{2t} - e^{3t} & -e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix}$

4.20
(a) $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$, (b) $e^{at}\begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/6 \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.24 $\mathbf{x}(t) = (c_1 e^{t\sqrt{2}} + c_2 e^{-t\sqrt{2}})(1,1) + (c_3 \cos t\sqrt{2} + c_4 \sin t\sqrt{2})(-1,1)$ för lämpliga c_i
4.25 $\mathbf{x}(t) = (c_1 e^{t\sqrt{2}} + c_2 e^{-t\sqrt{2}})(2,1) + (c_3 \cos t\sqrt{2} + c_4 \sin t\sqrt{2})(-2,1)$ för lämpliga c_i

Kapitel 5

Skalärproduktsrum

5.1 Inledning

I det här kapitlet skall vi införa mer struktur på våra abstrakta vektorrum som gör det möjligt att generalisera geometriska begrepp som längd och vinklar.

För de geometriska vektorerna i ***Första kursen*** införde vi skalärprodukten mellan två vektorer genom $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos\varphi$, där $|\mathbf{x}|$ är längden av $\mathbf{x}$ och φ vinkeln mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$. Eftersom $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ och $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}$ kan all information om längd och vinklar uttryckas med hjälp av skalärprodukten.

I en ortonormerad bas på $\mathbb{R}^3$ gäller $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$. Detta uttryck är naturligt att generalisera till $\mathbb{R}^n$. Vi får den så kallade standardskalärpodukten på $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_iy_i$.

I samband med studiet av spektralteori såg vi att även för operatorer på reella vektorrum är det naturligt att studera deras utvidgning till komplexa vektorrum. Så vi vill införa skalärprodukter också på komplexa vektorrum.

För reella tal har vi den ointressanta likheten $|x|^2 = x\cdot x$. För komplexa tal har vi den lika självklara men mycket intressantare identiteten $|z|^2 = z\bar{z}$. Därför är det naturligt att definiera standardskalärprodukten på $\mathbb{C}^n$ genom $\mathbf{z}\cdot\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n z_i\overline{w_i}$.

Om vi låter $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$ beteckna vilken som helst av dessa skalärprodukter är det lätt att se att $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$ uppfyller följande regler.

1. $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \overline{\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle}$
2. $\langle\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle = \alpha\langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle + \beta\langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle$
3. $\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle \geq 0$

4. Om $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ så $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Anmärkning 5.1. I fysik använder man ofta skalärprodukten $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_F = \overline{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} w_i$ i stället för (den matematiska) standardskalärprodukten på $\mathbb{C}^n$.

5.2 Skalärprodukt

Definition 5.2. *Låt V vara ett reellt eller komplext vektorrum och låt $\langle \ , \ \rangle$ var en funktion som till två vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ i V ger en skalär $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Då är $\langle \ , \ \rangle$ en* ***skalärprodukt*** *på V om $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ uppfyller skalärproduktsaxiomen*

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$ *(konjugat)symmetri*
2. $\langle \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ *linjäritet*
3. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ *positivitet*
4. *Om $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ så $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

Ett vektorrum med en skalärprodukt kallas för ett ***skalärproduktsrum****.*

Ibland säger man ***inre produkt*** och ***inre produktrum*** i stället för skalärprodukt och skalärproduktsrum.

Om vektorrummet är reellt har konjugatet ingen betydelse och 1. reduceras till $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$. Så en reell skalärprodukt är symmetrisk.

Exempel 5.3.
1. Standardskalärprodukterna på $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{C}^n$.

2. $\ell^2 = \{\mathbf{x} = (x_i)_1^\infty; \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$ med skalärprodukten $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$.

3. $\mathbb{P}_n$: Polynomen av grad högst n med skalärprodukten $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)\overline{q(t)}dt$.

4. $\mathbb{P}_2$: Polynomen av grad högst 2 med skalärprodukten $\langle p, q \rangle = p(-1)\overline{q(-1)} + p(0)\overline{q(0)} + p(1)\overline{q(1)}$.

5. $C[0, 1]$: De kontinuerliga funktionerna på $[0, 1]$ med skalärprodukten $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt$.

6. $L^2(I)$: De integrerbara funktionerna på intervallet I som uppfyller $\int_I |f(t)|^2 dt < \infty$ med skalärprodukten $\langle f, g \rangle = \int_I f(t)\overline{g(t)}dt$.

I exemplen 1 och $3-5$ är det klart att $\langle \ , \ \rangle$ har mening. Däremot i exempel 2 och 6 är det inte självklart att den oändliga summan respektive integralen konvergerar. Detta följer av olikheten $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ för positiva tal a och b.

T.ex. i exempel 6 ger denna olikhet att $|f(t)\overline{g(t)}| = |f(t)||g(t)| \leq \frac{1}{2}(|f(t)|^2 + |g(t)|^2)$ för alla t. Så

$$\begin{aligned} |\langle f, g\rangle| = \left| \int_I f(t)\overline{g(t)}dt \right| &\leq \int_I |f(t)||g(t)|dt \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\int_I |f(t)|^2 dt + \int_I |g(t)|^2 dt \right) < \infty \end{aligned}$$

och integralen är (absolut)konvergent.

Ett annat problem i exempel 6 är att axiom 4 inte verkar gälla. Om f är en funktion som är noll i alla punkter utom en så gäller $\langle f, f\rangle = 0$. Detta problem kan lösas genom att utvidga integralbegreppet till den så kallade Lebesgueintegralen och identifiera funktioner som är lika ”nästan överallt”. Att genomföra detta ligger (långt) utanför denna kurs.

Övning 5.1. Visa att skalärprodukterna 1 och $3-5$ i Exempel 5.3 är skalärprodukter.

Övning 5.2. Visa olikheten $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ för positiva tal a och b.

Övning 5.3.

(a) Visa att om $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$ för alla $\mathbf{y}$ så är $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) Visa att om $\langle \mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle$ för alla $\mathbf{z}$ så är $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Övning 5.4. Visa att $\langle \mathbf{z}, \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}\rangle = \bar{\alpha}\langle \mathbf{z}, \mathbf{x}\rangle + \bar{\beta}\langle \mathbf{z}, \mathbf{y}\rangle$.

5.2.1 Normen av en vektor

Låt $\mathbf{x}$ vara en vektor i ett skalärproduktsrum V.

Definition 5.4. ***Normen*** *av vektorn* $\mathbf{x}$ *definieras genom* $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}$.

Normen har följande egenskaper.

Sats 5.5.

1. $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$ — *homogenitet*
2. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ — *triangelolikheten*
3. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ — *positivitet*
4. *Om* $\|\mathbf{x}\| = 0$ *så* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Bevis. 1., 3. och 4. är lätta och lämnas som övning till läsaren. Vi återkommer till triangelolikheten i Korollarium 5.14 □

Ett vektorrum med en norm som uppfyller 1. – 4. i Sats 5.5 kallas ett ***normerat rum***. Normen behöver inte komma från en skalärprodukt men i den här kursen kommer alla normer att göra det. När normen kommer från en skalärprodukt kan man återfå skalärprodukten från normen. Detta följer av de så kallade polariseringsidentiteterna.

Sats 5.6.
(a) Om V är ett reellt skalärproduktsrum så gäller

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2\right) .$$

(b) Om V är ett komplext skalärproduktsrum så gäller

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 + i\|\mathbf{x}+i\mathbf{y}\|^2 - i\|\mathbf{x}-i\mathbf{y}\|^2\right) .$$

Bevis. Både beviset av (a) och (b) är en kalkyl. För (a) har vi

$$\begin{aligned} \left(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2\right) &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle \\ = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle &- (\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle) \\ &= 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle . \end{aligned}$$

Beviset av (b) är analogt och lämnas som övning. □

Vi avslutar med ett viktigt resultat som bevisas med en kalkyl liknande den i beviset av Sats 5.6.

Sats 5.7 (Parallellogramlagen)**.** *I ett skalärproduktsrum gäller*

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2) .$$

5.2.2 Cauchy-Schwarz olikhet

En av de viktigaste satserna i linjär algebra med tillämpningar i olika delar av matematiken är Cauchy-Schwarz olikhet.

Sats 5.8. *I ett skalärproduktsrum gäller*

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| .$$

Vi ger två bevis av detta resultat. Det första är ett kort algebraiskt bevis. Det andra beviset är geometriskt och mer (?) begripligt.

Bevis 1. Om $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ är påståendet trivialt sant så vi kan anta att $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Vi har

$$0 \leq \|\mathbf{x} - t\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \bar{t}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - t\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + |t|^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \tag{5.1}$$

för alla t.

I det reella fallet blir detta

$$0 \leq \|\mathbf{x} - t\mathbf{y}\|^2 = \|x\|^2 - 2t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2 \|y\|^2; .$$

Kvadratkomplettering ger

$$0 \leq \|y\|^2 \left(t - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|y\|^2} \right)^2 + \|x\|^2 - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}{\|y\|^2} .$$

Men om skall detta gälla för alla t måste $\|x\|^2 - \dfrac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}{\|y\|^2} \geq 0$. Så $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$ vilket ger $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \leq \|x\| \|y\|$ och vi är klara i det reella fallet.

Från kvadratkompletteringen ovan ser vi att polynomet är minimalt då $t = \dfrac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}$. Med detta värde på t också i det komplexa fallet ger (5.1) (Kolla noga!) att

$$0 \leq \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\|\mathbf{y}\|^2}$$

och satsen är bevisad.

□

För det geometriska beviset behöver vi införa ytterligare några begrepp.

Definition 5.9. *Två vektorer* $\mathbf{x}$ *och* $\mathbf{y}$ *i ett skalärproduktsrum* V *är* ***ortogonala*** *om* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. *Vi skriver* $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ *då* $\mathbf{x}$ *och* $\mathbf{y}$ *är ortogonala.*

Sats 5.10 (Pythagoras sats)**.** *Om vektorerna* $\mathbf{x}$ *och* $\mathbf{y}$ *är ortogonala så gäller*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 .$$

Bevis. Eftersom $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ gäller $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.

□

Vi behöver också följande

Lemma 5.11. *Låt* $\mathbf{x}$ *och* $\mathbf{y}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, *vara vektorer i ett skalärproduktsrum. Då kan* $\mathbf{x}$ *entydigt skrivas*

$$\mathbf{x} = P_{\mathbf{y}}\mathbf{x} + \mathbf{x}_{\perp} \ ,$$

där $P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}$ *är parallell med* $\mathbf{y}$ *och* $\mathbf{x}_{\perp}$ *är ortogonal mot* $\mathbf{y}$.

Att en vektor $\mathbf{x}$ är parallell med $\mathbf{y}$ betyder att $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$ för någon skalär α.

Bevis. Skriv $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y} + (\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y})$. Vi skall välja α så att $\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y} \perp \mathbf{y}$ dvs. $\mathbf{0} = \langle \mathbf{x} - \alpha\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle - \alpha\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle$. Så $\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y} \perp \mathbf{y}$ om och endast om $\alpha = \dfrac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}$ och alltså är $P_{\mathbf{y}}\mathbf{x} = \dfrac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y}$. □

Anmärkning 5.12. Observera att $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$.

Anmärkning 5.13. Vektorn $P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}$ kallas för den ortogonala projektionen av $\mathbf{x}$ på $\mathbf{y}$. Vi skall strax generalisera Lemma 5.11 till fallet då vektorn $\mathbf{x}$ ersätts med ett delrum till V.

Bevis 2 av Cauchy-Schwarz olikhet.
Vi kan anta att $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.

Om $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$ så gäller $\|\mathbf{x}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{y}\|$ och $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| = |\langle \alpha\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle| = |\alpha|\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle = |\alpha|\,\|\mathbf{y}\|^2 = |\alpha|\,\|\mathbf{y}\|\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ och vi har alltså likhet i Cauchy-Schwarz olikhet.

I det allmänna fallet har vi enligt Anmärkning 5.12 att $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$. Enligt Pythagoras sats är $\|\mathbf{x}\|^2 = \|P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{x}_{\perp}\|^2 \geq \|P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}\|^2$. Så $\|P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|$ och vi får $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| = |\langle P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| = \|P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$. □

En viktig konsekvens av Cauchy-Schwarz olikhet är triangelolikheten.

Korollarium 5.14 (Triangelolikheten)**.** *I ett skalärproduktsrum gäller*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \ .$$

Bevis. Vi har

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle} + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2 \ , \end{aligned}$$

där den sista olikheten är Cauchy-Schwarz olikhet.

Eftersom $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|$ och $\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ är positiva tal får vi $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. □

5.2.3 Ortonormalbaser

Vi påminner om att två vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är ortogonala, $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, då $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Definition 5.15. *En vektor $\mathbf{x}$ är ortogonal mot ett delrum E om $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ för varje vektor $\mathbf{y} \in E$.*

Två delrum E och F är ortogonala om $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ för alla $\mathbf{x} \in E$, $\mathbf{y} \in F$.

Om E är ett delrum till V är det ***ortogonala komplementet*** *till E definierat av*

$$E^\perp = \{\mathbf{x} \in V; \mathbf{x} \perp E\} .$$

Det är lätt att se att $E^\perp$ är ett delrum till V och att $E \perp E^\perp$.

Vi har också

Lemma 5.16. *Om $E = \mathrm{Span}\,(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ så gäller $\mathbf{x} \perp E$ om och endast om $\mathbf{x} \perp \mathbf{x}_i$ för alla i.*

Bevis. Om $\mathbf{x} \perp E$ är självklart $\mathbf{x} \perp \mathbf{x}_i$.

Omvänt om $\mathbf{v} \in E$ och $\mathbf{x} \perp \mathbf{x}_i$ för alla i, så gäller $\mathbf{v} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n$ och alltså är $\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = c_1\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x} \rangle + c_2\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x} \rangle + \ldots + c_n\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{x} \rangle = 0$. □

Definition 5.17. *Ett system av vektorer $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n$ är ortogonalt om vektorerna är parvis ortogonala, dvs. $\mathbf{x}_i \perp \mathbf{x}_j$ om $i \neq j$. Om dessutom $\|\mathbf{x}\| = 1$ säger vi att systemet är ortonormalt.*

Lemma 5.18. *Om $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n$ är ett ortogonalt system av nollskilda vektorer så är $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n$ linjärt oberoende.*

Bevis. Antag att

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} .$$

Skalärmultiplikation med $\mathbf{x}_i$ ger $c_i\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle = 0$ och eftersom $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle = \|\mathbf{x}_i\|^2 \neq 0$ får vi $c_i = 0$. □

Vi har följande generalisering av Pythagoras sats.

Sats 5.19. *Om vektorerna $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n$ är ortogonala så gäller*

$$\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_n\|^2 = \|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{x}_2\|^2 + \ldots + \|\mathbf{x}_n\|^2 .$$

Bevis. Kan bevisas med en räkning eller med induktion.

Fallet $n = 2$ är Pythagoras sats. Om $n > 2$ så gäller att $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_n \rangle = 0$. Så $\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_n\|^2 = \|\mathbf{x}_1 + (\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_n)\|^2 = \|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_n\|^2$. Men induktionsantagandet ger $\|\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_n\|^2 = \|\mathbf{x}_2\|^2 + \ldots + \|\mathbf{x}_n\|^2$ och påståendet följer.

□

Från (den generaliserade) Pythagoras sats följer att

$$\|\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n\|^2 = \|\alpha_1\mathbf{x}_1\|^2 + \|\alpha_2\mathbf{x}_2\|^2 + \ldots + \|\alpha_n\mathbf{x}_n\|^2 =$$
$$|\alpha_1|^2\|\mathbf{x}_1\|^2 + |\alpha_2|^2\|\mathbf{x}_2\|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2\|\mathbf{x}_n\|^2$$

om vektorerna $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n$ är ortogonala. Om de är ortonormala gäller

$$\|\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n\|^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2 .$$

Definition 5.20. *Om vektorerna i en bas $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n$ för V är ortogonala kallas basen för en **ortogonalbas**. Om vektorerna är ortonormala är basen en **ortnormalbas**.*

Vi skriver ofta ON-bas i stället för ortnormalbas.

För att bestämma koordinaterna till en vektor i en godtycklig bas behöver vi lösa ett ekvationssystem. I en ortogonalbas är det mycket lättare att bestämma koordinaterna. Om

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n$$

ger skalärmultiplikation med $\mathbf{e}_k$ att $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k\rangle = \alpha_k\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k\rangle = \alpha_k\|\mathbf{e}_k\|^2$ och alltså

$$\alpha_k = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k\rangle}{\|\mathbf{e}_k\|^2} .$$

Är basen en ortonormalbas får vi $\alpha_k = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k\rangle$.

5.2.4 Konstruktion av ortonormalbaser

Om vi har en bas $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n$ på ett skalärproduktsrum V kan vi från denna bas konstruera en ortonormalbas på följande sätt.

Steg 1. Sätt $\mathbf{e}_1 = \dfrac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}$ och låt $E_1 = \operatorname{Span}\mathbf{e}_1$.

Antag att vi har konstruerat ortonormala vektorer $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_k$ sådana att $E_k = \operatorname{Span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_k) = \operatorname{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_k)$.

Steg $k+1$. Vi vill ersätta vektorn $\mathbf{v}_{k+1}$ med en vektor $\mathbf{e}_{k+1}$ som är ortogonal mot E_k. För detta sätter vi

$$\tilde{\mathbf{e}}_{k+1} = \mathbf{v}_{k+1} - (\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{e}_k)$$

och väljer α_i så att $\langle \tilde{\mathbf{e}}_{k+1}, \mathbf{e}_i\rangle = 0$, $i = 1, \ldots, k$. Eftersom $\langle \tilde{\mathbf{e}}_{k+1}, \mathbf{e}_i\rangle = \langle \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{e}_i\rangle - \alpha_i$ så blir $\tilde{\mathbf{e}}_{k+1}$ ortogonal mot E_i när $\alpha_i = \langle \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{e}_i\rangle$. Så

$$\tilde{\mathbf{e}}_{k+1} = \mathbf{v}_{k+1} - \big(\langle \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2 + \ldots + \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_k\rangle\mathbf{e}_k\big) .$$

Slutligen normaliserar vi och sätter $\mathbf{e}_{k+1} = \dfrac{\tilde{\mathbf{e}}_{k+1}}{\|\tilde{\mathbf{e}}_{k+1}\|}$. Det är lätt att visa (Gör det!) att $\operatorname{Span}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) = \operatorname{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ för alla k. När $k = n$ betyder detta att $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ är den sökta basen.

Denna algoritm för att ortogonalisera vektorer brukar kallas för Gram-Schmidts metod. Att normalisera vektorerna $\tilde{\mathbf{e}}_k$ ger teoretiskt enklare formler men vid praktisk räkning är det lättare att inte normalisera ($\|\tilde{\mathbf{e}}_k\|$ är i allmänhet "besvärliga") utan göra detta efter att att alla vektorerna $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_n$ har beräknats.

Exempel 5.21. Låt $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 1)$ och $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 1)$. Bestäm en ortonormerad bas för $\operatorname{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

Lösning.

Steg 1. Sätt $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{v}_1$

Steg 2. Sätt $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha\mathbf{v}_1$ och välj α så att $\langle \tilde{\mathbf{e}}_1, \mathbf{e}'_2 \rangle = 0$. Detta är uppfyllt om $\langle \tilde{\mathbf{e}}_1, \mathbf{e}'_2 \rangle = \langle \tilde{\mathbf{e}}_1, \mathbf{v}_2 \rangle - \alpha \langle \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_1 \rangle = 0$. Eftersom $\langle \tilde{\mathbf{e}}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 3$ och $\langle \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_1 \rangle = 4$ ger detta $\alpha = \frac{3}{4}$. Så $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{3}{4}\tilde{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{4}(-3, 1, 1, 1)$.

För att räkningarna skall bli enklare i nästa steg ersätter vi $\mathbf{e}'_2$ med $\tilde{\mathbf{e}}_2 = 4\mathbf{e}'_2 = (-3, 1, 1, 1)$.

Steg 3. Sätt $\tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{v}_3 - \alpha\tilde{\mathbf{e}}_1 - \beta\tilde{\mathbf{e}}_2$ där α och β väljs så att $\langle \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_3 \rangle = 0$ och $\langle \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3 \rangle = 0$.

Det första villkoret betyder att $\langle \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_3 \rangle = \langle \tilde{\mathbf{e}}_1, \mathbf{v}_3 \rangle - \alpha \langle \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_1 \rangle = 0$. Nu är $\langle \tilde{\mathbf{e}}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = 2$ och $\langle \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_1 \rangle = 4$ och alltså gäller $\alpha = \frac{1}{2}$.

Det andra villkoret betyder att $\langle \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3 \rangle = \langle \tilde{\mathbf{e}}_2, \mathbf{v}_3 \rangle - \beta \langle \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_2 \rangle = 0$. Nu är $\langle \tilde{\mathbf{e}}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = 2$ och $\langle \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_2 \rangle = 12$ så $\beta = \frac{1}{6}$.

Detta ger $\tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{e}}_1 - \frac{1}{6}\tilde{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{3}(0, -2, 1, 1)$.

Slutligen för att få en ortonormerad bas normaliserar vi dessa vektorer och får

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\tilde{\mathbf{e}}_1}{\|\tilde{\mathbf{e}}_1\|} = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1),\ \mathbf{e}_2 = \frac{\tilde{\mathbf{e}}_2}{\|\tilde{\mathbf{e}}_2\|} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-3, 1, 1, 1)$$
$$\text{och } \mathbf{e}_3 = \frac{\tilde{\mathbf{e}}_3}{\|\tilde{\mathbf{e}}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(0, -2, 1, 1)\ .$$

5.2.5 Ortogonal projektion

I det här avsnittet skall vi generalisera Lemma 5.11.

Definition 5.22. *Låt E vara ett delrum till V. Den **ortogonala projektionen**, $P_E\mathbf{v}$, av en vektor $\mathbf{v}$ på E är den vektor $\mathbf{w} \in E$ som uppfyller att $\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp E$.*

När $E = \operatorname{Span}(\mathbf{v})$ ger Lemma 5.11 att det finns precis en sådan vektor. Existensen av den ortogonala projektionen då E är ett ändligtdimensionellt delrum är en följd av följande resultat.

Proposition 5.23. *Om $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ är en ortonormalbas för E så är*

$$\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k$$

den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på E.

Bevis. Vi visar först entydigheten. Så antag att $\mathbf{w}$ är en ortogonal projektion av $\mathbf{v}$ på E. Eftersom $\mathbf{w} \in E$ kan $\mathbf{w}$ skrivas $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{e}_k$. Villkoret $\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp \mathbf{e}_k$ ger $0 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_k \rangle - \alpha_k \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_k \rangle - \alpha_k$. Så $\alpha_k = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_k \rangle$ och $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k$ är entydigt bestämd.

Omvänt om vi sätter $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k$ får vi $\langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle = 0$ så $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k$ är den ortogonala projektionen. □

Om E är ett ändligtdimensionellt delrum till V, så finns enligt Gram-Schmidts metod en ortonormalbas på E och vi har bevisat följande

Sats 5.24. *Om E är ett ändligtdimensionellt delrum till V så existerar den ortogonala projektionen och är entydigt bestämd.*

Vi har nu tillräckligt med verktyg för att lösa följande approximationsproblem:

Vad är avståndet från $\mathbf{v}$ till delrummet E? Mer precist, vilken vektor $\mathbf{w}$ uppfyller $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = d = \inf_{\mathbf{x} \in E} \|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|$.

Svaret ges av

Sats 5.25. *Den ortogonal projektionen $P_E\mathbf{v}$ minimerar avståndet från $\mathbf{v}$ till E, dvs.*

$$\|\mathbf{v} - P_E\mathbf{v}\| = \inf_{\mathbf{x} \in E} \|\mathbf{v} - \mathbf{x}\| \, .$$

Bevis. Låt $\mathbf{x} \in E$ och $\mathbf{w} = P_E\mathbf{v}$. Eftersom $\mathbf{w} - \mathbf{x} \in E$ och $\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp E$ ger Pythagoras sats (rita figur)

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{w} + \mathbf{w} - \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{w} - \mathbf{x}\|^2 \geq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2$$

med likhet om och endast om $\mathbf{x} = \mathbf{w}$. □

Exempel 5.26. Bestäm det tredjegradspolynom $p(t) \in \mathbb{P}_3[t]$ som uppfyller $p(0) = p'(0) = 0$ och som gör

$$\int_{-1}^{1} |3 + 5t - p(t)|^2 dt$$

så liten som möjligt.

Lösning. Låt $E = \{p(t) \in \mathbb{P}_3[t]; p(0) = p'(0) = 0\}$. Ett polynom ligger i E när det kan skrivas $p(t) = at^2 + bt^3$, $a, b \in \mathbb{R}$. Så en bas för E är $p_2(t) = t^2$ och $p_3(t) = t^3$.

Vi skall bestämma den bästa approximationen av $Q(t) = 3 + 5t$ i den norm som induceras av skalärprodukten $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$. Observera att $\langle t^2, t^3\rangle = \int_{-1}^{1} t^5 dt = 0$ så t^2, t^3 är en ortogonalbas på E.

Den bästa approximationen av Q ges av den ortogonala projektionen, $P_E Q$, av Q på E. Vi har $Q(t) = P_E Q(t) + Q^{\perp}(t) = \alpha t^2 + \beta t^3 + Q^{\perp}(t)$ där $Q^{\perp}$ är ortogonal mot E.

Skalärmultiplikation med t^2 ger $\langle t^2, Q\rangle = \alpha\langle t^2, t^2\rangle$. Eftersom $\langle t^2, Q\rangle = \int_{-1}^{1} 3t^2 dt = 2$ och $\langle t^2, t^2\rangle = \int_{-1}^{1} t^4 dt = \frac{2}{5}$ får vi $\alpha = 5$.

Skalärmultiplikation med t^3 ger $\langle t^3, Q\rangle = \beta\langle t^3, t^3\rangle$. Eftersom $\langle t^3, Q\rangle = \int_{-1}^{1} 5t^4 dt = 2$ och $\langle t^3, t^3\rangle = \int_{-1}^{1} t^6 dt = \frac{2}{7}$, får vi $\beta = 7$.

Det sökta polynomet är alltså är alltså $p(t) = 5t^2 + 7t^3$.

Övning 5.5. Antag att $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = 3$ och $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 2 + i$. Bestäm
(a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$, (b) $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$, (c) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - i\mathbf{v}\rangle$ och (d) $\langle \mathbf{u} + i\mathbf{v}, 4i\mathbf{u}\rangle$.

Övning 5.6. Varför är *inte* följande uttryck en skalärprodukt?

(a) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = x_1y_1 - x_2y_2$

(b) $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p'(t)q(t)dt$ på rummet av polynom

(c) $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$ på $\mathbb{P}^2$, rummet av andragradspolynom

Övning 5.7. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ vara en ortonormerad bas. Visa att om $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ och $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n$ så gäller

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n$$

Övning 5.8. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ vara en bas på det komplexa vektorrummet V, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ och $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n$. Visa att $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n$ är en komplex skalärprodukt på V och att $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ är en ortonormalbas på V i denna skalärprodukt.

Övning 5.9. Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $(1, 1, 1, 1)$ på det delrum som spänns av $(1, 3, 1, 1)$ och $(1, 2, 1, 1)$.

Övning 5.10. Bestäm avståndet från vektorn $(1, 2, 3, 4)$ till delrummet som spänns av $(1, -1, 1, 0)$ och $(1, 2, 1, 1)$.

Övning 5.11. Låt P_E vara den ortogonala projektionen på delrummet E i skalärproduktsrummet V. Antag att $\dim V = n$ och $\dim E = m$. Bestäm egenvärdena och egenrummen till P_E. Vad är den algebraiska och den geometriska multipliciteten för dessa egenrum?

Övning 5.12. Använd Gram-Schmidts algoritm för att ortogonalisera vektorerna $(1, 2, 3)$ och $(1, 3, 1)$ i standardskalärprodukten på $\mathbb{R}^n$ och bestäm matrisen för den ortogonala projektionen på rummet som spänns av dessa vektorer.

Övning 5.13. Bestäm de fyra första Legendrepolynomen. Detta betyder att, i rummet av polynom med skalärprodukten $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)\overline{q(t)}dt$, skall du ortonormalisera systemet 1, t, t^2, t^3 med Gram-Schmidts metod.

Övning 5.14. Låt P_E vara matrisen till den ortogonala projektionen på delrummet E i standardskalärprodukten på $\mathbb{R}^n$. Visa att P_E är symmetrisk och att $P_E^2 = P_E$.

Övning 5.15. Antag att P är ortogonal projektion på delrummet E och att Q är ortogonal projektion på delrummet $E^\perp$.

(a) Vad är $P + Q$ och PQ?

(b) Visa att $P - Q$ är sin egen invers.

Förslag till svar

5.5 (a) 17, (b) 9, (c) $5 + 10i$, (d) $8 - 20i$

5.6 (a) $\|(0, 1)\| = 0$, (b) $\|1\| = 0$, (c) $\|t(1 - t)\| = 0$

5.9 $(1, 1, 1, 1)$ $(2(1, 2, 1, 1) - (1, 3, 1, 1) = (1, 1, 1, 1))$

5.10 $\frac{1}{21}\sqrt{3570} \approx 2,85$

5.11 $\lambda = 0$ eller 1 med egenrummen $E^\perp$ respektive E. Multipliciteten är $n - m$ och m

5.12 $\frac{1}{54}\begin{pmatrix} 5 & 14 & 7 \\ 14 & 50 & -2 \\ 7 & -2 & 53 \end{pmatrix}$

5.13 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}t$, $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3t^2 - 1)$ och $\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5t^3 - 3t)$.

5.15 $P + Q = I$, $PQ = 0$

Kapitel 6

Hilbertrum

I det här kapitlet skall vi generalisera resultaten i Kapitel 5 till oändligt dimensionella vektorrum. Med hjälp av skalärprodukt och den inducerade normen kan vi diskutera avstånd och konvergens. Vi skall införa de så kallade Hilbertrummen som är fullständiga skalärproduktsrum. Vi börjar med att diskutera begreppet fullständighet.

6.1 Fullständighet

Vi börjar med att påminna om fullständigheten hos $\mathbb{R}$. Följande resultat om de reella talen är fundamentala.

- Varje växande uppåt begränsad följd är konvergent.
- Satsen om mellanliggande värden.
- Varje uppåt begränsad mängd av reella tal har ett supremum.
- Varje reell Cauchyföljd är konvergent.

Dessa egenskaper uttrycker alla att $\mathbb{R}$ ”saknar hål”. Vilket som helst av dem kan tas som axiom och sedan kan man bevisa de övriga. I Person-Böiers används den första egenskapen som axiom och sedan bevisas den andra (i ett Appendix). De två sista nämns inte. Så här kommer en beskrivning.

Om vi har en ändlig mängd $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ så betecknar vi med $\max M$ det största av talen $a_1, \dots, a_n$. Vi skall definiera $\sup M$, en generalisering av detta till oändliga mängder.

Definition 6.1. *Låt $M \subset \mathbb{R}$ vara en uppåt begränsad mängd. Då är* ***supremum*** *av M, det minsta reella tal c, som uppfyller $a \leq c$ för alla $a \in M$.*

Supremum av M betecknas $\sup M$.

På liknade sätt definierar vi *infimum* som det största tal som är mindre än eller lika med alla tal i M. Infimum är en generalisering av minimum och betecknas $\inf M$. För en ändlig mängd gäller $\max M = \sup M$ och $\min M = \inf M$.

De rella talen uppfyller

Supremumaxiomet

Varje uppåt begränsad mängd M har ett supremum, $\sup M$.

Exempel 6.2. Låt $M = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 \leq 2\}$ Då gäller $\sup M = \sqrt{2}$.

6.1.1 Cauchyföljder

Definition 6.3. *En följd $(x_n)_1^\infty, x_n \in \mathbb{R}$, är en **Cauchyföljd** om för varje $\epsilon > 0$ finns ett tal N så att $|x_n - x_m| < \epsilon$ för alla $n, m > N$.*

Med hjälp av supremumaxiomet kan man bevisa följande sats.

Sats 6.4. *Varje Cauchyföljd av reella tal är konvergent.*

Satsen betyder att om x_n är en Cauchyföljd så finns ett reellt tal x så att $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Vi skall nu generalisera detta till skalärproduktsrum. Låt V vara ett vektorrum med skalärprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ och inducerad norm $\|\ \|$.

Definition 6.5. *(a) En följd $(\mathbf{x}_n)_1^\infty, \mathbf{x}_n \in V$, **konvergerar** mot $\mathbf{x} \in V$ om $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| = 0$.*

*(b) En följd $(\mathbf{x}_n)_1^\infty, \mathbf{x}_n \in V$, är en **Cauchyföljd** om för varje $\epsilon > 0$ finns ett tal N så att $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| < \epsilon$ för alla $n, m > N$.*

Sats 6.6. *Om V är ett ändligtdimensionellt skalärproduktsrum så är varje Cauchyföljd konvergent.*

Bevis. Vi antar först att V är ett reellt vektorrum. Låt $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ vara en ortonormalbas på V och $\mathbf{x}_n$ en Cauchyföljd i V med koordinaterna $x_i^n, i = 1, \ldots, d$ i basen $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$. Enligt Pythagoras sats gäller

$$|x_i^n - x_i^m|^2 \leq |x_1^n - x_1^m|^2 + \ldots + |x_d^n - x_d^m|^2 = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|^2 .$$

Så är x_i^n en Cauchyföljd av reella tal och enligt Sats 6.4 är den konvergent. Om $x_i = \lim_{n\to\infty} x_i^n$ och $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_d\mathbf{e}_d$ så gäller

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|^2 = |x_1^n - x_1|^2 + \ldots + |x_d^n - x_d|^2 \to 0,\ n \to \infty$$

och vi är klara i det reella fallet.

Härnäst observerar vi att detta kan användas för att visa att $\mathbb{C}$ är fullständigt genom att betrakta $\mathbb{C}$ som isomorft med $\mathbb{R}^2$ med den ortonormerade basen $1 = (1, 0)$, $i = (0, 1)$.

Till sist observerar vi att beviset ovan för reella vektorrum fungerar likadant för komplexa vektorrum.

$\square$

Egenskapen i satsen är så viktig att den görs till en definition.

Definition 6.7. *Ett rum sådant att varje Cauchyföljd är konvergent kallas för ett* ***fullständigt*** *vektorrum.*

Beviset ovan fungerar *inte* för oändligtdimensionella vektorrum och satsen är *inte* sann i allmänhet. Detta motiverar följande definition.

Definition 6.8. *Ett* ***Hilbertrum*** *är ett fullständigt skalärproduktsrum.*

Anmärkning 6.9. I avsnitt 5.2.1 definierade vi normerat rum. Ett fullständigt normerat rum kallas för ett ***Banachrum***. Ett Hilbertrum är alltid ett Banachrum men inte omvänt.

Exempel 6.10. Enligt Sats 6.6 är varje ändligtdimensionellt skalärproduktsrum ett Hilbertrum.

Exempel 6.11. ℓ^2 är ett Hilbertrum.

Beviset lämnas som (en svår?) övning.

Exempel 6.12. $C[0, 1]$ är *inte* ett Hilbertrum. Låt (för $n \geq 3$) f_n definieras genom (rita figur)

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{2} \\ n(x - \frac{1}{2}), & \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1, & x \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \end{cases} \quad \text{och } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Då är f_n kontinuerliga, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ men f är inte kontinuerlig.

Exempel 6.13. $L^2(I)$ är ett Hilbertrum.

Beviset av detta går långt utanför denna kurs. Påståendet är inte sant för Riemannintegrerbara funktioner eftersom gränsvärdet av Riemannintegrerbara funktioner inte är Riemannintegrerbara. För att påståendet skall gälla behöver man utvidga integralbegreppet till Lebesgueintegrerbara funktioner. (L i L^2 kommer från Lebesgue.)

6.2 Ortogonal projektion i Hilbertrum

Definition 6.14. *En mängd M av vektorer i ett Hilbertrum är* ***sluten*** *om $x_n \in M, \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ medför att $\mathbf{x} \in M$.*

Nu kan vi formulera vår generalisering av Sats 5.24.

Sats 6.15. *Låt E vara ett slutet delrum av Hilbertrummet H. Då kan varje vektor $\mathbf{v} \in H$ entydigt skrivas*

$$\mathbf{v} = P_E\mathbf{v} + \mathbf{w}$$

där $P_E\mathbf{v}$ är den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på E, dvs. $P_E\mathbf{v} \in E$ och $\mathbf{w} = \mathbf{v} - P_E\mathbf{v} \perp E$.

För att bevisa detta kan vi inte använda Sats 5.23, den är inte sann om $\dim E = \infty$, utan vi bevisar minimeringsegenskapen i Sats 5.25 direkt.

Vi börjar med

Proposition 6.16. *Låt C vara en sluten konvex mängd i H. Då finns ett entydigt bestämt element i C med minimal norm.*

Att C är konvex betyder att om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ligger i C så gör sträckan mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ det också. Mer formellt

Definition 6.17. *En mängd C är* ***konvex*** *om $t\mathbf{u} + (1-t)\mathbf{v} \in C$ för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C$ och alla $0 \leq t \leq 1$.*

Bevis. Vi utgår från parallellogramlagen (Sats 5.7) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$ som vi skriver om som

$$\left\|\frac{\mathbf{u}-\mathbf{v}}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\right) - \left\|\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{2}\right\|^2 . \tag{6.1}$$

Låt $\delta = \inf\{\|\mathbf{x}\|; \mathbf{x} \in C\}$ och välj en följd $\mathbf{x}_n \in C$ så att $\|\mathbf{x}_n\| \to \delta$ då $n \to \infty$. Observera att eftersom C är konvex så gäller $\frac{1}{2}(\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_m) \in C$ och alltså $\|\frac{1}{2}(\mathbf{x}_n+\mathbf{x}_m)\| \geq \delta$ och $-\|\frac{1}{2}(\mathbf{x}_n+\mathbf{x}_m)\|^2 \leq -\delta^2$. Så om vi använder (6.1) på $\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m$ får vi

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|^2 &= \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{x}_n\|^2 + \|\mathbf{x}_m\|^2\right) - \left\|\frac{\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_m}{2}\right\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{x}_n\|^2 + \|\mathbf{x}_m\|^2\right) - \delta^2 \,.\end{aligned} \tag{6.2}$$

Om $\epsilon > 0$ och vi väljer N tillräckligt stort ger detta $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|^2 \leq 2\|\mathbf{x}_n\|^2 + 2\|\mathbf{x}_m\|^2 - 4\delta^2 < \epsilon$ om $n, m \geq N$. Alltså är $\mathbf{x}_n$ en Cauchyföljd i Hilbertrummet H. Men H är fullständigt så $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ för något $\mathbf{x} \in H$. Detta ger $\|\mathbf{x}\| = \lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n\| = \delta$. (Här har vi använt $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n\| = \|\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n\|$. Beviset lämnas som övning.) Eftersom $\mathbf{x}_n \in C$ och C är slutet följer det att $\mathbf{x} \in C$ så $\mathbf{x}$ är ett element med minimal norm.

Entydigheten följer också från (6.1). Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är två vektorer som ger minimum ger (6.1) att $\left\|\frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}}{2}\right\|^2 \leq 0$ så $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. □

Bevis av Sats 6.15. Låt $C = \mathbf{v} + E = \{\mathbf{v} + \mathbf{e}; \mathbf{e} \in E\}$. Då är (Varför då?) C en konvex sluten mängd. Enligt Proposition 6.16 finns ett element $Q\mathbf{v}$ med minimal norm i C. Sätt $P_E\mathbf{v} = \mathbf{v} - Q\mathbf{v}$. Då gäller $P_E\mathbf{v} \in E$ och $\mathbf{v} = P_E\mathbf{v} + Q\mathbf{v}$. Det återstår att visa att $Q\mathbf{v} \perp E$, dvs. $\langle Q\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle = 0$ för alla $\mathbf{u} \in E$. Vi kan anta att $\|\mathbf{u}\| = 1$. Att $Q\mathbf{v}$ har minimal norm betyder att $\|Q\mathbf{v}\| \leq \|Q\mathbf{v} - \alpha\mathbf{u}\|$ för alla α. Så

$$\begin{aligned}0 &\leq \|Q\mathbf{v} - \alpha\mathbf{u}\|^2 - \|Q\mathbf{v}\|^2 = \langle Q\mathbf{v} - \alpha\mathbf{u}, Q\mathbf{v} - \alpha\mathbf{u}\rangle - \|Q\mathbf{v}\|^2 \\ &= |\alpha|^2\|\mathbf{u}\|^2 - \alpha\langle \mathbf{u}, Q\mathbf{v}\rangle - \bar{\alpha}\langle Q\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle = |\alpha|^2 - \alpha\langle \mathbf{u}, Q\mathbf{v}\rangle - \overline{\alpha\langle \mathbf{u}, Q\mathbf{v}\rangle} \,.\end{aligned}$$

Med $\alpha = \overline{\langle \mathbf{u}, Q\mathbf{v}\rangle} = \langle Q\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle$ ger detta $0 \leq -|\alpha|^2$ dvs. $|\langle Q\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle| = 0$. □

6.3 Baser i Hilbertrum

Antag att H är oändligtdimensionellt och att $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \ldots$ är linjärt oberoende.

Definition 6.18. *Vektorerna* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \ldots$ *är en (uppräknelig)* ***Hilbertrumsbas*** *för* H *om varje vektor* $\mathbf{v} \in H$ *entydigt kan skrivas*

$$\mathbf{v} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{e}_n$$

där $c_n \in \mathbb{K}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Om vektorerna $\mathbf{e}_n$ *uppfyller* $\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m\rangle = 0, n \neq m$ *och* $\|\mathbf{e}_n\| = 1$ *kallas basen för en* ***ortonormalbas***.

Här betyder $\mathbf{v} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{e}_n$ konvergens i normen på H, dvs. $\lim_{N\to\infty} \|\mathbf{v} - \sum_{n=1}^{N} c_n \mathbf{e}_n\| = 0$.

För ändligtdimensionella Hilbertrum är en Hilbertsrumsbas detsamma som en bas enligt Definition 1.6 men för oändligtdimensionella Hilbertrum är en Hilbertsrumsbas och en vektorrumsbas (enligt Definition 1.6) olika saker. Man kan definiera Hilbertsrumsbaser också i överuppräkneliga Hilbertrum men för enkelhets skull nöjer vi oss med det uppräkneliga fallet.

Gram-Schmidts metod fungerar även för uppräkneliga rum, så om H har en bas har H också en ortonormalbas $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \ldots$.

Precis som i det ändligtdimensionella fallet gäller att om $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \ldots$ är en ortonormalbas i H så gäller

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{e}_n \text{ där } c_n = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_n \rangle \ .$$

Bevis. Låt $\mathbf{x}_N = \sum_{n=1}^{N} c_n \mathbf{e}_n$. Då är $c_n = \langle \mathbf{x}_N, \mathbf{e}_n \rangle$ om $N > n$. Så $c_n = \lim_{N\to\infty} \langle \mathbf{x}_N, \mathbf{e}_n \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_n \rangle$. Det sista påstendet följer av Cauchy-Schwarz olikhet; $|\langle \mathbf{x}_N, \mathbf{e}_n \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_n \rangle| = |\langle \mathbf{x}_N - \mathbf{x}, \mathbf{e}_n \rangle \leq \|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}\| \|\mathbf{e}_n\| = \|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}\| \to 0, N \to \infty$.

□

Avbildningen T från H till ℓ^2 definierad av att $\mathbf{x} \mapsto (c_n)_1^{\infty}$ visar att ett uppräkneligt Hilbertrum är isomorft med ℓ^2. Men inte nog med det, avbildningen är en isometri, dvs. $\|\mathbf{x}\|_H = \|T\mathbf{x}\|_{\ell^2}$. Detta är innehållet i Parsevals formel,

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2,$$

en generalisering av Pythagoras sats. Parsevals formel följer genom att låta $\mathbf{x}_N = \sum_{n=1}^{N} c_n \mathbf{e}_n$, använda Pythagoras sats på $\mathbf{x}_N$, låta $N \to \infty$ och använda Övning 6.2.

Exempel 6.19. Vektorerna $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0, , \ldots), \ldots$ är en ON-bas för ℓ^2. Ty om $\mathbf{x} = (x_i)_1^{\infty}$ så gäller $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbf{e}_i$.

Exempel 6.20. Betrakta $L^2(-\pi, \pi)$ med den normaliserade skalärprodukten

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} dt \ .$$

Då är funktionerna

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \cos 3t, \sin 3t, \ldots$$

en ON-bas för $L^2(-\pi, \pi)$. Att de är ortonormala lämnas som övning. Att de spänner L^2 är ett djupt resultat. Den intresserade hänvisas till *Rudin: Real and complex analysis, Kap. 4* för ett bevis.

Om vi sätter

$$a_n = \langle f, \cos nt \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

och

$$b_n = \langle f, \sin nt \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

så gäller

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

med konvergens i normen på L^2. Serien $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ kallas för Fourierserien till $f(t)$ och a_n,b_n dess Fourierkoefficienter.

I detta exempel har vi

Sats 6.21 (Parsevals formel)**.** *Om $f \in L^2$ så*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \; .$$

Anmärkning 6.22. Punktvis konvergens av Fourieserier är mycket mer delikat. Ett berömt resultat, nämligen att Fourierserien till en funktion i L^2 konvergerar nästan överallt, bevisades av Lennart Carleson 1966.

Exempel 6.23. Bestäm Fourierkoefficienterna till funktionen $y = \operatorname{sgn}(x)$ och undersök hur delsummor av Fourierserien approximerar $\operatorname{sgn}(x)$.

Lösning. Eftersom signum är en udda funktion kommer $a_n = 0$ för alla n. Dessutom gäller

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x \, \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos n\pi]_0^{\pi} \; .$$

När n är jämnt blir $b_n = 0$ och när n är udda så är $b_n = \frac{4}{n\pi}$.

Så vi har att

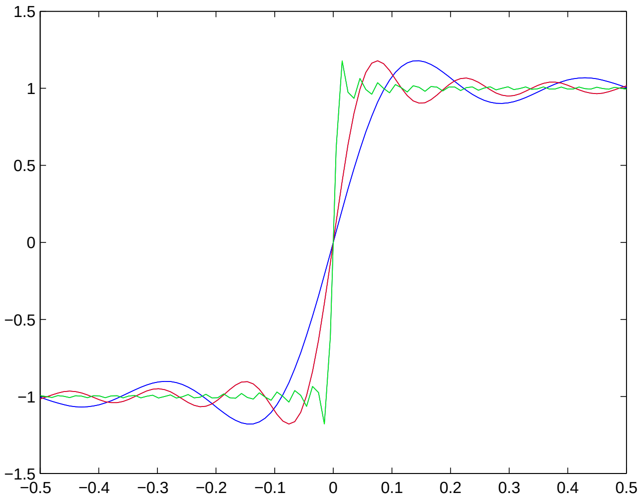
$$\operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

med konvergens i L^2.

I nedanstående figur visas grafen av de trigonometriska polynomen

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{N}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

då $N = 10$ (den blå kurvan), $N = 20$ (den röda kurvan) och $N = 100$ (den gröna kurvan).



Figuren illustrerar det så kallade Gibbs fenomen. Funktionen signum har ett språng i origo av storleken 2. Skillnaden mellan maximum och minimum hos de approximerande trigonometriska polynom är större. Man kan visa att då N är stort så kommer "språnget" hos det trigonometriska polynomet att vara cirka 9% större än hos signum trots att de trigonometriska polynomen konvergerar i L^2.

Om vi använder Parsevals formel på $\operatorname{sgn} t$ får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \|\operatorname{sgn} t\|^2 = \frac{1}{\pi}2\pi = 2$$

och alltså

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{2\pi^2}{4^2} = \frac{\pi^2}{8}\ .$$

Sätter vi $s = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ har vi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}s$. Så

$$s = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}s$$

vilket ger $\dfrac{3}{4}s = \dfrac{\pi^2}{8}$ och

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ .$$

Övning 6.1. Bestäm den bästa approximationen av funktionen $f(x) = x$ i $L^2[-\pi, \pi]$ med trigonometriska polynom av grad fem, dvs. med en funktion i

$$\mathrm{Span}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \ldots, \cos 5x, \sin 5x) \ .$$

Hur stort är felet?

Övning 6.2. Antag att $\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$. Visa att $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n\| = \|\mathbf{x}\|$.

Övning 6.3. Visa att om E är slutet delrum i ett Hilbertrum så är $\mathbf{v} + E$ en sluten konvex mängd i H.

Övning 6.4. Visa att en Cachyföljd är begränsad (dvs. att $\|\mathbf{x}_n\| \leq C < \infty$ för alla n).

Övning 6.5. Visa att $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_i \mathbf{e}_i = \mathbf{x}$ i Exempel 6.19.

Övning 6.6. Visa att ℓ^2 är fullständigt.

Förslag till svar

6.1 $S_5(x) = 2\sin x - \sin 2x + \dfrac{2}{3}\sin 3x - \dfrac{1}{2}\sin 4x + \dfrac{2}{5}\sin 5x$,
Fel$^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_5(x)|^2\, dx = 4\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{5}\frac{1}{n^2}\right)$ så Fel $\approx 0,725$

Kapitel 7

Linjära funktionaler och adjunkter

7.1 Riesz representationssats

Vi påminner om att en linjär funktional på vektorrummet V är en linjär avbildning $T : V \to \mathbb{K}$. Om V är ett skalärproduktsrum och $\mathbf{u} \in V$ så är, enligt Definition 5.2, Axiom 2., avbildningen $T\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ en linjär funktional på V. I själva verket är alla linjära funktionaler av denna typ.

Sats 7.1 (Riesz representationssats)**.** *Antag att T är en linjär funktional på det ändligtdimensionella skalärproduktsrummet V. Då finns en entydig vektor $\mathbf{u}$ så att*

$$T\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \ .$$

Bevis. För att visa existensen låter vi $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ vara en ON-bas på V. Då gäller

$$\begin{aligned} T\mathbf{v} &= T(\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \ldots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_n \rangle \mathbf{e}_n) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle T\mathbf{e}_1 + \ldots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_n \rangle T\mathbf{e}_n \\ &= \langle \mathbf{v}, \overline{T\mathbf{e}_1}\, \mathbf{e}_1 \rangle + \ldots \langle \mathbf{v}, \overline{T\mathbf{e}_n}\, \mathbf{e}_n \rangle = \langle \mathbf{v}, \overline{T\mathbf{e}_1}\, \mathbf{e}_1 + \ldots + \overline{T\mathbf{e}_n}\, \mathbf{e}_n \rangle \end{aligned}$$

så $\mathbf{u} = \overline{T\mathbf{e}_1}\, \mathbf{e}_1 + \ldots + \overline{T\mathbf{e}_n}\, \mathbf{e}_n$ duger.

Entydigheten följer av Övning 5.3(b), om $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{u}} \rangle$ för alla $\mathbf{v}$ så $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$.

$\square$

Anmärkning 7.2. Riesz representationssats gäller också för Hilbertrum men vi bevisar inte det här.

7.2 Adjungerade operatorer

Antag nu att $T : V \to W$ är en linjär avbildning mellan två skalärprodukts-rum V och W. Då är för varje fixt $\mathbf{w}$ avbildningen $S : \mathbf{v} \mapsto \langle T\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ en linjär funktional och ges alltså av ett entydigt element $T^*\mathbf{w}$. Vi kan alltså göra följande definition.

Definition 7.3. ***Adjunkten*** *till den linjära avbildningen $T : V \to W$ är den avbildning $T^* : W \to V$ som definieras av*

$$\langle T\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, T^*\mathbf{w}\rangle \textit{ för alla } \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W \ .$$

Det är lätt att se att T^* är linjär. Beviset lämnas som Övning 7.1.

T^* kallas också för den adjungerade operatorn till T. Om $V = W$ och $T^* = T$ säger vi att T är ***självadjungerad***.

I ***Första kursen*** definierades transponatet av en matris A. Om $A = (a_{ij})$ så är transponatet av A den matris A^T som uppfyller $A^T = (a_{ji})$. En matris med $A = A^T$ kallas ***symmetrisk***.

För komplexa matriser ersätts detta med det Hermitska transponatet A^H där $A^H = (\bar{a}_{ji}) = \overline{A^T}$. En matris med $A = A^H$ kallas ***Hermitsk***.

Om A är reell så gäller $A^H = A^T$.

Sambandet mellan adjungerade operatorer och (det Hermitska) transponatet ges av

Proposition 7.4. *Om $T : V \to W$ och A och B är ortonormerade baser på V respektive W så gäller*

$$[T^*]_{AB} = ([T]_{BA})^H = \overline{([T]_{BA})^T} \ .$$

Bevis. Låt $[T]_{BA} = (\alpha_{ij})$ och $[T^*]_{AB} = (\beta_{ij})$. Kolonnerna i $[T]_{BA}$ är $[Ta_j]_B$. Så α_{ij} är den i-te koordinaten i $[Ta_j]_B$. Eftersom B är en ON-bas har vi $\alpha_{ij} = \langle Ta_j, b_i\rangle$. På samma sätt får vi $\beta_{ij} = \langle T^*b_j, a_i\rangle$. Så $\beta_{ij} = \langle T^*b_j, a_i\rangle = \langle b_j, Ta_i\rangle = \overline{\langle Ta_i, b_j\rangle} = \overline{\alpha_{ji}}$. □

Speciellt får vi, om A är en matris och A^* är den adjungerade operatorn till A i standardskalärprodukten på $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$, att $A^* = A^T$ respektive $A^* = A^H$.

Exempel 7.5. I kvantmekanik definierar man tillståndet hos en partikel som ett vågpaket, dvs. som en funktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ med $\|\psi\| = 1$. Vi tolkar

$$\int_E |\psi(t)|^2 dt$$

som sannolikheten att partikeln befinner sig i mängden E. En observerbar storhet A är en självadjungerad operator på ett lämpligt delrum av L^2. Medelvärdet av A i tillståndet ψ är

$$E[A] = \int_{\mathbb{R}} A\psi(t)\,\overline{\psi}(t)dt = \langle A\psi, \psi\rangle.$$

Eftersom A är självadjungerad är $A = A^*$ och alltså gäller

$$\langle A\psi, \psi\rangle = \langle \psi, A^*\psi\rangle = \langle \psi, A\psi\rangle = \overline{\langle A\psi, \psi\rangle},$$

så medelvärdet är reellt.

Två exempel på storheter är
a) Läge. $A\psi(x) = x\psi(x)$
b) Moment. $B\psi = 2\pi i\psi'$.

Anmärkning 7.6. I kvantmekanik används nästan alltid beteckningen $A^\dagger$ i stället för A^H.

7.3 Dimensionssatsen igen

Vi påminner om dimensionssatsen, Sats 2.17. Om $T : V \to W$ så gäller $\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Ran} T = \dim V$.

Om vi använder detta på T^* får vi

$$\dim \operatorname{Ker} T^* + \dim \operatorname{Ran} T^* = \dim W \ . \tag{7.1}$$

Detta blir ännu mer användbart på grund av

Sats 7.7 (Rangsatsen)**.**

$$\dim \operatorname{Ran} T = \dim \operatorname{Ran} T^* \ .$$

Bevis. Genom att välja ON- baser på V och W kan vi anta att avbildningen går från $\mathbb{K}^n$ till $\mathbb{K}^m$ och ges av en matris A. Låt B vara en reducerad trappstegsmatris som är Gaussekvivalent med A. Då har $\operatorname{Ran} A$ (eller kolonnrummet för A) en bas som består av pivotkolonnerna i A.

För att bestämma en bas för $\operatorname{Ran} A^*$ (eller radrummet för A) observerar vi först att pivotraderna i B är en bas för $\operatorname{Ran} B^*$. Dessutom är det lätt att se att radrummet till en matris inte ändras under radoperationer. Så $\operatorname{Ran} A^* = \operatorname{Ran} B^*$.

Så vi har visat att både $\dim \operatorname{Ran} A$ och $\dim \operatorname{Ran} A^*$ är antalet pivotelement i A och alltså gäller $\dim \operatorname{Ran} A = \dim \operatorname{Ran} A^*$. $\square$

$\dim \operatorname{Ran} T$ kallas ofta för operatorns rang. Rangsatsen säger alltså att T och T^* har samma rang. I matrisfallet uttrycks detta ofta som:

Kolonnrangen för en matris är densamma som dess radrang.

Från rangsatsen och (7.1) får vi $\dim \operatorname{Ker} T^* + \dim \operatorname{Ran} T = \dim W$. Vi sammanfattar detta i

Korollarium 7.8 (Dimensionssatsen)**.** *Antag att $T : V \to W$ är en linjär avbildning mellan två ändligtdimensionella skalärproduktsrum rum V och W. Då gäller*

$$\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Ran} T = \dim V\ .$$

och

$$\dim \operatorname{Ker} T^* + \dim \operatorname{Ran} T = \dim W\ .$$

En viktig följd av dimensionssatsen är följande resultat som ger existens av lösningar till ett linjärt ekvationssystem från entydigheten av ett annat.

Korollarium 7.9. *Låt $T : V \to W$. Då är ekvationen*

$$T\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

lösbar för alla $\mathbf{b} \in W$ om och endast om ekvationen

$$T^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

endast har den triviala lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Bevis. Antag att $T^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bara har lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Enligt dimensionssatsen gäller $\dim W = \dim \operatorname{Ker} T^* + \dim \operatorname{Ran} T = 0 + \dim \operatorname{Ran} T = \dim \operatorname{Ran} T$. Så $\operatorname{Ran} T$ är ett delrum till W med full dimension och alltså gäller $\operatorname{Ran} T = W$.

Den omvända implikationen följer på liknande sätt. Detaljerna lämnas som en övning för läsaren.

□

Eftersom den adjungerade operatorn är definierad med avseende på en skalärprodukt är det ingen överraskning (?) att det finns ett samband mellan de fundamentala delrummen $\operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Ran} T$, $\operatorname{Ker} T^*$ och $\operatorname{Ran} T^*$, och deras ortogonala komplement.

Sats 7.10. *Låt $T : V \to W$ vara en linjär operator mellan två skalärproduktsrum V och W. Då gäller*

$$\begin{array}{lll} 1.\ \operatorname{Ker} T^* & = & (\operatorname{Ran} T)^\perp \\ 2.\ \operatorname{Ker} T & = & (\operatorname{Ran} T^*)^\perp \\ 3.\ \operatorname{Ran} T & = & (\operatorname{Ker} T^*)^\perp \\ 4.\ \operatorname{Ran} T^* & = & (\operatorname{Ker} T)^\perp \end{array}$$

I beviset kommer vi att använda att $(T^*)^* = T$, se Övning 7.2. Dessutom behöver vi

Lemma 7.11. *Om E är ett delrum till skalärproduktsrummet V så gäller $(E^\perp)^\perp = E$.*

Bevis. Låt $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ vara en ortogonalbas på E. Utvidga denna till en ortogonalbas $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ på V. Då gäller att $x = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_k\mathbf{e}_k + x_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \ldots + x_n\mathbf{e}_n \in E^\perp$ om och endast om $x_1 = \ldots = x_k = 0$. Så $E^\perp = \mathrm{Span}(\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Med samma resonomang ser vi att $(E^\perp)^\perp = \mathrm{Span}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) = E$. □

Bevis av Sats 7.10. Enligt Lemmat följer att 1. och 3. är ekvivalenta och att 2. och 4. också är det. Dessutom följer 2. från 1. genom att använda 1. på operatorn T^*. Så det räcker att bevisa 1.

Att $\mathbf{x} \in (\mathrm{Ran}\, T)^\perp$ betyder att

$$\langle \mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle = 0 \text{ för alla } \mathbf{y} \, .$$

Eftersom $\langle \mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle = \langle T^*\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ är detta ekvivalent med

$$\langle T^*\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \text{ för alla } \mathbf{y} \, .$$

Men detta betyder att $T^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Vi har alltså visat att $\mathbf{x} \in (\mathrm{Ran}\, T)^\perp$ om och endast om $T^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dvs. påstående 1.

□

Exempel 7.12. Låt $\mathbb{P}_2$ vara de reella polynomen av högst andra graden med skalärprodukten

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) \, .$$

Den linjära operatorn $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ definieras av $Tp(t) = p(0)$. Bestäm den adjungerade operatorn T^* till T.

Lösning. Vi börjar med att bestämma $\mathrm{Ran}\, T^*$. Enligt Sats 7.10 gäller $\mathrm{Ran}\, T^* = (\mathrm{Ker}\, T)^\perp$. Men $\mathrm{Ker}\, T = \{p; p(0) = 0\} = \mathrm{Span}\,(t, t^2)$. Så $\dim \mathrm{Ker}\, T = 2$ och enligt dimensionssatsen är $\dim \mathrm{Ran}\, T^* = 3 - 2 = 1$. Så $\mathrm{Ran}\, T^* = \mathrm{Span}\, \mathbf{v}$ där $\mathbf{v}$ är någon vektor i $\mathrm{Span}\,(t, t^2)^\perp$. Vi observerar att $1 \notin \mathrm{Ker}\, T$ och sätter $\mathbf{v} = 1 - \alpha t - \beta t^2$ där α och β väljs så att $\mathbf{v} \perp \mathrm{Span}\,(t, t^2)$. Detta betyder att $\langle \mathbf{v}, t \rangle = 0$ och $\langle \mathbf{v}, t^2 \rangle = 0$, vilket är uppfyllt då $\alpha = 0$ och $\beta = 1$. Så $\mathrm{Ran}\, T^* = \mathrm{Span}\,(1 - t^2)$.

Låt nu $q \in \mathbb{P}_2$. Då är $T^*q = c(1 - t^2)$ för något $c \in \mathbb{R}$. Men

$$p(0)\Big(q(-1) + q(0) + q(1)\Big) = \langle Tp, q \rangle = \langle p, T^*q \rangle = c\langle p, 1 - t^2 \rangle = cp(0) \, .$$

Så $c = q(-1) + q(0) + q(1)$ och $T^*q = \Big(q(-1) + q(0) + q(1)\Big)(1 - t^2)$.

7.4 Isometrier och unitära operatorer

Definition 7.13. *En linjär avbildning mellan två skalärproduktsrum, $T : U \to V$, är en* ***isometri*** *om den bevarar normen,*

$$\|T\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|$$

för alla $\mathbf{u} \in U$.

Här är $\|T\mathbf{u}\|$ normen i W och $\|\mathbf{u}\|$ normen i V.

Eftersom $\|T\mathbf{u}-T\mathbf{v}\| = \|T(\mathbf{u}-\mathbf{v})\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$ bevarar T avståndet mellan två vektorer. Detta i sin tur medför att att T är injektiv.

Det är klart att en operator som bevarar skalärprodukten, $\langle T\mathbf{u}, T\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$, är en isometri. Från polariseringsidentiteterna, Sats 5.6, ser vi att omvändningen också gäller.

Sats 7.14. *En operator $T : U \to V$ är en isometri om och endast om $\langle T\mathbf{u}, T\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ för alla $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.*

Korollarium 7.15. *En operator $T : U \to V$ är en isometri om och endast om $T^*T = I$.*

Bevis. Vi har $\langle T^*T\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle T\mathbf{u}, T\mathbf{v}\rangle$.

Om $T^*T = I$ följer att $\langle T\mathbf{u}, T\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ för alla $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Så T är en isometri.

Omvänt om T är en isometri så gäller enligt Sats 7.14 att $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle T\mathbf{u}, T\mathbf{v}\rangle = \langle T^*T\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$. Övning 5.3 ger att $T^*T\mathbf{u} = \mathbf{u}$ för alla $\mathbf{u}$. Så $T^*T = I$. $\square$

Korollariet säger att om T är en isometri så är T^* är en vänsterinvers till T.

Definition 7.16. *En inverterbar isometri T kallas för en* ***unitär*** *operator.*

Sats 7.17. *En isometri $T : U \to V$ är unitär om och endast om* $\dim U = \dim V$.

Bevis. Avbildningen $T : U \to \operatorname{Ran} T$ är bijektiv med inversen T^*. Så $T : U \to V$ är inverterbar om och endast om $\operatorname{Ran} T = V$ vilket är ekvivalent med att $\dim \operatorname{Ran} T = \dim V$. Men enligt Sats 2.13 så gäller $\dim U = \dim \operatorname{Ran}\ T$ och påståendet följer. $\square$

Definition 7.18. *En kvadratisk matris är unitär om $U^H U = I$. Om U är reell kallas U* ***ortogonal*** *och vi har $U^T U = I$.*

Två matriser A och B kallas ***unitärt ekvivalenta*** *om det finns en unitär matris U så att $A = UBU^*$.*

Observera att villkoren $U^H U = I$ och $U^T U = I$ betyder att kolonnerna i U är ortonormala i standardskalärprodukten på $\mathbb{C}^n$ respektive $\mathbb{R}^n$. Eftersom U är kvadratisk ger Sats 7.17 att en unitär matris U är inverterbar och $U^{-1} = U^*$.

Definition 7.19. *En operator $T : V \to V$ är unitärt diagonaliserbar om det finns en ortonormalbas B på V sådan att $[T]_B$ är en diagonalmatris.*

Vi har följande motsvarighet till Sats 3.13.

Sats 7.20. *En operator $T : V \to V$ är unitärt diagonaliserbar om och endast om T har en ortonormerad bas av egenvektorer.*

Beviset är likadant som beviset av Sats 3.13.

Övningar

Övning 7.1. Visa att T^* är linjär.

Övning 7.2. Visa att $\langle \mathbf{v}, T\mathbf{w} \rangle = \langle T^*\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

Övning 7.3. (a) $(S+T)^* = S^* + T^*$

(b) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

(c) $(ST)^* = T^* S^*$

(d) $(T^*)^* = T$

Övning 7.4. Låt A vara en reell $n \times m$-matris. Beskriv $(\operatorname{Ran} A^T)^\perp$ och $(\operatorname{Ran} A)^\perp$.

Övning 7.5. Låt T vara en linjär operator på ett reellt vektorrum V. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna.

(a) T^* har samma egenvärden som T.

(b) T^* har samma egenvektorer som T.

(c) Om T är diagonaliserbar så är T^* det också.

Bevis eller motexempel.

Övning 7.6. En matris med 27 rader och 39 kolonner har rangen 17. Bestäm dimensionen hos de fyra fundamentala delrummen till matrisen.

Övning 7.7. Finns det en matris T med följande egenskaper?

(a) $\operatorname{Ran} T$ innehåller $(1,0,0)$ och $(0,0,1)$, och $\operatorname{Ran} T^*$ innehåller $(1,1)$ och $(1,2)$

(b) $\operatorname{Ran} T$ spänns av $(1,1,1)$, och $\operatorname{Ker} T$ spänns av $(1,2,3)$

(c) $\operatorname{Ran} T = \mathbb{R}^4$ och $\operatorname{Ran} T^* = \mathbb{R}^3$

Ange i så fall en sådan matris. Om det inte finns en sådan matris förklara varför.

Ledning. Kolla först om dimensionerna stämmer.

Övning 7.8. Låt V vara det delrum av $L^2[-\pi, \pi]$ som spänns av funktionerna $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$ och $\sin 2x$. Bestäm den adjungerade operatorn till T given av $Tf(x) = f(x) + f'(x)$.

Övning 7.9. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestäm den ortogonala projektionen på de fyra fundamentala delrummen till A.

Övning 7.10. Låt T vara en matris med m rader och n kolonner. Visa att $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker}(T^*T)$.

Ledning. Du skall visa två inklusioner. För den ena kan du använda att

$$\|T\mathbf{x}\|^2 = \langle T\mathbf{x}, T\mathbf{x}\rangle = \langle T^*T\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle .$$

Övning 7.11. Använd förra övningen för att visa att

(a) $\dim \operatorname{Ran} T = \dim \operatorname{Ran} T^*T$

och

(b) Om $T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bara har den triviala lösningen så har T en vänsterinvers.

Ledning för (b). Hur många rader och kolonner har T^*T?

Övning 7.12. Låt T vara en självadjungerad operator på skalärproduktsrummet V. Antag att $T^2 = T$. Visa att T är en ortogonal projektion på $\operatorname{Ran} T$.

Övning 7.13. Visa att följande matriser är unitärt ekvivalenta med en diagonalmatris. Vilken? Och i vilken bas?

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Övning 7.14. Låt T vara en operator på ett skalärproduktsrum.

Är följande påståenden sanna?

(a) Om $\|T\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ för alla $\mathbf{x}$ så är T unitär.

(b) Om $\|T\mathbf{e}_k\| = \|\mathbf{e}_k\|$ för $k = 1, 2, \ldots, n$ där $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ är en ortonormalbas på V så är T unitär.

Bevis eller motexempel.

Övning 7.15. Låt $A = (a_{ij})$ och $B = (b_{ij})$ vara unitärt ekvivalenta $n \times n$ matriser.

(a) Visa att A^*A och B^*B har samma spår.

Ledning. Övning 3.12

(b) Visa att

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|^2 .$$

(c) Visa att

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & i \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} i & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

inte är unitärt ekvivalenta.

Övning 7.16. Vilka av följande matriser är unitärt ekvivalenta?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$.

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Ledning. Unitärt ekvivalenta matriser är konjugerade, och konjugerade matriser har samma determinant, samma spår och samma egenvärden. Dessutom kan förra övningen vara användbar.

Övning 7.17. Vad händer i Exempel 7.12 om vi betraktar T som en linjär funktional, dvs. som en avbildning $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$?

Förslag till svar

7.4 $(\operatorname{Ran} A^T)^\perp = \{\mathbf{x}; A\mathbf{x} = 0\}$ och $(\operatorname{Ran} A)^\perp = \{\mathbf{x}; A^T\mathbf{x} = 0\}$

7.5 (a) och (c) är sanna, (b) falsk

7.6 $\dim \operatorname{Ran} T = \dim \operatorname{Ran} T^* = 17$, $\dim \operatorname{Ker} T = 22$, $\dim \operatorname{Ker} T^* = 10$

7.7

(a) Ja, t.ex. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b),(c): Nej.

7.8 $T^* f = f - f'$

7.9

$$P_{\operatorname{Ker} A} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad P_{\operatorname{Ran} A^*} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$P_{\operatorname{Ker} A^*} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ och } P_{\operatorname{Ran} A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

7.13 (a) $\operatorname{diag}(3, -1)$; $1/\sqrt{2}(1, 1)$ och $1/\sqrt{2}(1, -1)$
(b) $\operatorname{diag}(i, -i)$; $1/\sqrt{2}(1, -i)$ och $1/\sqrt{2}(1, i)$
(c) $\operatorname{diag}(-2, -2, 4)$; $1/\sqrt{2}(1, 0, -1)$, $1/\sqrt{6}(1, -2, 1)$ och $1/\sqrt{3}(1, 1, 1)$

7.14 (a) Sant, (b) Falskt, Motexempel: $T(x, y) = (x + y, 0)$ på $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{e}_1 = (0, 1)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ men $(1, 1)$ och $T(1, 1) = (2, 0)$ har olika norm.

7.16 Endast (d).

7.17 $T^*r = r(1 - t^2)$.

Kapitel 8

Spektralsatsen

8.1 Spektralsatsen

I det här kapitlet antar vi att vektorrummet V är ändligtdimensionellt och $\dim V = n$. Vi skall ge nödvändiga och tillräckliga villkor för att en linjär avbildning skall vara unitärt diagonaliserbar, dvs. att det finns en ortonormalbas B sådan att $[T]_B$ är en diagonalmatris.

Vi börjar med följande sats.

Sats 8.1 (Schur)**.** *Låt $T : V \to V$ vara en operator på ett komplext skalärproduktsrum. Då finns en ortonormerad bas $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ sådan att $[T]_B$ är en övre triangulär matris.*

Bevis. Vi bevisar satsen med induktion över dimensionen på vektorrummet.

Om $n = 1$ är satsen trivialt sann.

Så antag att $\dim V = n > 1$ och att satsen gäller för alla skalärproduktsrum $\tilde{V}$ med $\dim \tilde{V} = n-1$. Låt $\mathbf{e}_1$ vara en egenvektor till T med egenvärdet λ_1 och $\|\mathbf{e}_1\| = 1$. Utvidga $\mathbf{e}_1$ till en ortonormerad bas $\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ på V. Sätt $E = \mathrm{Span}(\mathbf{e}_1)^{\perp}$ och låt P_1 och P_E vara ortogonal projektion på $\mathrm{Span}\,(\mathbf{e}_1)$ respektive E. Så om $\mathbf{v} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$ gäller $P_1\mathbf{v} = c_1\mathbf{e}_1$ och $P_E\mathbf{v} = c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$. Alltså är $P_1 + P_E = I$ och $T = P_1T + P_ET$.

Nu gäller $P_ET(E) \subset E$ så P_ET är en operator på E. Eftersom $\dim E = n-1$ ger induktionsantagandet att det finns en ortonormerad bas $B_2 = \{\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ på E där $[P_ET]_{B_2}$ är övre triangulär. Låt nu $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Då är $[T]_B = \begin{pmatrix} [T\mathbf{e}_1]_B & [T\mathbf{e}_2]_B & \dots & [T\mathbf{e}_n]_B \end{pmatrix}$ övre triangulär. För att se det observerar vi att $T\mathbf{e}_1 = \lambda_1\mathbf{e}_1$. Dessutom, om $k \geq 2$, så har vi $T\mathbf{e}_k = P_1T\mathbf{e}_k + P_ET\mathbf{e}_k$. Eftersom $P_1T\mathbf{e}_k \in \mathrm{Span}(\mathbf{e}_1)$ och $[P_ET]_{B_2}$ är övre triangulär gäller $P_1T\mathbf{e}_k = a_{1k}\mathbf{e}_1$ och $P_ET\mathbf{e}_k = \sum_{i=2}^{k} a_{ik}\mathbf{e}_i$ för några a_{ik}. Detta ger $T\mathbf{e}_k =$

$P_1T\mathbf{e}_k + P_ET\mathbf{e}_k = a_{1k}\mathbf{e}_1 + \sum_{i=2}^k a_{ik}\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^k a_{ik}\mathbf{e}_i$ så $[T]_B$ är övre triangulär. $\square$

Korollarium 8.2. *Varje linjär operator på ett komplext vektorrum V har en bas B där $[T]_B$ är övre triangulär.*

Bevis. Tag en bas $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ på V och inför en skalärprodukt på V genom kräva att denna bas skall vara en ortonormalbas på V, jämför Övning 5.8. Schurs sats ger att det finns en (ortonormerad) bas B där matrisen $[T]_B$ är övre triangulär. $\square$

Anmärkning 8.3. Man kan bevisa Korollarium 8.2 utan användning av skalärprodukt och Schurs sats. Ett bevis skissas i Övning 8.8.

Som vanligt är situationen mer komplicerad för reella vektorrum. Vi har

Sats 8.4. *Antag att T är en linjär operator på ett reellt skalärproduktsrum V med dimension n. Om T har n reella egenvärden så finns en ortonormerad bas B sådan att $[T]_B$ är en övre triangulär matris.*

Bevis. Beviset är väsentligen det samma som för Schurs sats. Den enda nya ingrediensen är att vi behöver visa att att alla egenvärden till P_ET är reella. Men vi har

$$[T]_B = \left(\begin{array}{c|ccccc} \lambda_1 & * & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ \hline 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \cdot & & & [P_ET]_{B_2} & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & & & & & \end{array}\right)$$

Så

$$p_T(\lambda) = \det(T - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)\det(P_ET - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)p_{P_ET}(\lambda)$$

och alltså är varje egenvärde $\lambda \neq \lambda_1$ till P_ET ett egenvärde till T och alltså reellt. $\square$

Vi har också

Sats 8.5. *Låt T vara en linjär operator på ett reellt skalärproduktsrum V. Då finns en ortonormerad bas B sådan att $[T]_B$ är en övre blocktriangulär matris där blocken har dimension 1 eller 2;*

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ 0 & A_2 & * & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

där A_k är en skalär eller en 2×2-matris.

Vi utelämnar beviset och påpekar bara att man använder Sats 3.9 för att bilda E_1 och $E = (E_1)^\perp$.

Låt oss nu återgå till att undersöka när T är unitärt diagonaliserbar.

Om T är en avbildning på ett reellt vektorrum och $[T]_B = D$ är diagonal i någon ortonormerad bas så gäller

$$[T^*]_B = [T]_B^* = D^T = D = [T]_B$$

så $T^* = T$ och alltså är T självadjungerad.

Omvändningen till detta gäller också.

Sats 8.6. *Antag att T är självadjungerad. Då finns en ortonormerad bas B på V där $[T]_B$ är diagonal.*

Detta är sant både för reella och komplexa vektorrum. Men i det komplexa fallet gäller ett starkare resultat, se Sats (8.11) nedan.

Bevis av Sats 8.6, komplexa fallet. Enligt Schurs sats finns det en ortonormerad bas B där $[T]_B$ är övre triangulär. Alltså är $[T^*]_B = [T]_B^H$ undre triangulär. Men eftersom $T = T^*$ betyder det att $[T]_B$ är diagonal. (Vi ser också att diagonalelementen är reella.) $\square$

För att bevisa satsen i det reella fallet behöver vi kunna använda Sats 8.4, den reella versionen av Schurs sats. För det behöver vi visa att T har n reella egenvärden.

Sats 8.7. *Egenvärdena till en självadjungerad operator på ett komplext skalärproduktsrum är reella.*

Bevis. Detta följer från den komplexa versionen av Sats 8.6. Eftersom $[T]_B = D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ så består basen B av egenvektorer och $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ är egenvärden till T. Dessutom gäller $[T^*]_B = D^H = \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n)$, så om T är självadjungerad får vi $\bar{\lambda}_k = \lambda_k$.

Vi ger också ett direkt bevis. Om $T\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ så gäller

$$\langle T\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \langle \lambda\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \lambda\|\mathbf{u}\|^2$$

men också

$$\langle T\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{u}, T^*\mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{u}, T\mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{u}, \lambda\mathbf{u}\rangle = \bar{\lambda}\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \bar{\lambda}\|\mathbf{u}\|^2 \ ,$$

så $\bar{\lambda} = \lambda$. □

Sats 8.8. *Antag att T är en självadjungerad operator på ett reellt skalärproduktsrum med dimension n. Då har T n stycken reella egenvärden.*

Bevis. Låt $A = [T]_B$ i någon ortonormerad bas B. Vi kan betrakta A som en linjär avbildning på $\mathbb{C}^n$. Enligt Sats 8.7 är alla n egenvärdena reella. Så ekvationssystemet $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är ett lösbart ekvationssystem med reella koefficienter och har alltså en icketrivial reell lösning $\mathbf{x}$. Om $[\mathbf{u}]_B = \mathbf{x}$ ger detta $T\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ så $\mathbf{u}$ är en egenvektor till T med egenvärdet λ. □

Bevis av Sats 8.6, reella fallet. Eftersom alla egenvärden är reella kan vi använda den reella versionen av Schurs sats, Sats 8.4. Så det finns en ortonormerad bas B där $[T]_B$ är övre triangulär. Alltså är $[T^*]_B = [T]_B^T$ undre triangulär. Men eftersom $T = T^*$ betyder det att $[T]_B$ är diagonal. □

Vi har alltså bevisat

Sats 8.9 (Den reella spektralsatsen)**.** *Antag att T är en operator på ett reellt skalärproduktsrum. Då finns en ortonormerad bas B där $[T]_B$ är diagonal om och endast om T är självadjungerad.*

I det komplexa fallet finns det fler operatorer än de självadjungerade som kan diagonaliseras unitärt. Låt oss anta att T är unitärt ekvivalent med en diagonalmatris, $[T]_B = D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ i en ortonormerad bas B. För en diagonalmatris gäller $DD^H = D\overline{D} = \text{diag}(|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2) = \overline{D}D = D^H D$. Eftersom $[T]_B = D$ gäller $[T^*]_B = [T]_B^* = [T]_B^H = D^H = \overline{D}$. Så

$$[TT^*]_B = [T]_B[T^*]_B = D\overline{D} = \overline{D}D = [T^*]_B[T]_B = [T^*T]_B$$

och $TT^* = T^*T$.

Definition 8.10. *En linjär avbildning N på ett skalärproduktsrum V är **normal** om*

$$NN^* = N^*N\ .$$

Vi har alltså visat att om T är unitärt diagonaliserbar så är T normal. Detta är den enkla delen av

Sats 8.11 (Komplexa spektralsatsen)**.** *Antag att V är ett komplext skalärproduktsrum och T en linjär avbildning på V. Då finns en ortonormerad bas B så att $[T]_B$ är en diagonalmatris om och endast om T är normal.*

Bevis. Det återstår att bevisa att om T är normal så finns en ortonormerad bas där T är diagonal.

Enligt Schurs sats finns en ortonormerad bas B där T är övre triangulär,

$$[T]_B = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)\ .$$

Elementet på plats 11 i $[T^*T]_B$ och $[TT^*]_B$ är $|a_{11}|^2$ respektive $|a_{11}|^2+|a_{12}|^2+\ldots+|a_{1n}|^2$. Så $|a_{12}|^2+\ldots+|a_{1n}|^2=0$ och alltså $a_{12}=\ldots=a_{1n}=0$.

Så

$$[T]_B = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Vi observerar också att

$$[T^*T]_B = \left(\begin{array}{c|ccc} |a_{11}|^2 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1^*A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right) \text{ och } [TT^*]_B = \left(\begin{array}{c|ccc} |a_{11}|^2 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1A_1^* & \\ 0 & & & \end{array}\right)\ .$$

Så $A_1A_1^* = A_1^*A_1$ och alltså är A_1 normal. Genom att upprepa argumentet ovan på

$$A_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

får vi $a_{23} = \ldots = a_{2n} = 0$. Ytterligare upprepning av detta argument (ändlig induktion) ger att $[T]_B = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ är en diagonalmatris. $\square$

Exempel 8.12. En självadjungerad operator är förstås normal men omvändningen gäller inte. Matrisen $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ är normal men inte självadjungerad. Etn reell matris som är normal men inte självadjungerad är $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Det är inte alldeles enkelt att avgöra när en operator är normal. Ett villkor som ibland kan vara användbart ges av följande resultat.

Proposition 8.13. *En operator är normal om och endast om* $\|N\mathbf{x}\| = \|N^*\mathbf{x}\|$ *för alla* $\mathbf{x}$*.*

Bevis. Om N är normal så gäller

$$\|N\mathbf{x}\|^2 = \langle N\mathbf{x}, N\mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{x}, N^*N\mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{x}, NN^*\mathbf{x}\rangle = \langle N^*\mathbf{x}, N^*\mathbf{x}\rangle = \|N^*\mathbf{x}\|^2 .$$

Omvänt om $\|N\mathbf{x}\| = \|N^*\mathbf{x}\|$ ger polariseringsidentiteterna (Sats 5.6) att $\langle N\mathbf{x}, N\mathbf{y}\rangle = \langle N^*\mathbf{x}, N^*\mathbf{y}\rangle$. Så $\langle NN^*\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle N^*\mathbf{x}, N^*\mathbf{y}\rangle = \langle N\mathbf{x}, N\mathbf{y}\rangle = \langle N^*N\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ för alla $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$. Så $N^*N = NN^*$. $\square$

En viktig egenskap hos självadjungerade avbildningar är följande

Sats 8.14. *Om T är självadjungerad och* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *är egenvektorer med olika egenvärde så är* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *ortogonala.*

Bevis. Detta följer av spektralsatsen (Hur då?) men vi ger ett direkt bevis. Om $T\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ och $T\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$ där $\lambda \neq \mu$ så gäller

$$\begin{aligned} \lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle &= \langle \lambda\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle T\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, T^*\mathbf{v}\rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, T\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mu\mathbf{v}\rangle = \bar{\mu}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \mu\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle . \end{aligned}$$

Så $(\lambda - \mu)\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$ och $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$. $\square$

Övning 8.1. Avgör vilka av följande påståenden som sanna.

(a) Varje unitär operator $U : V \to V$ är normal

(b) En matris är unitär om och endast om den är inverterbar

(c) Om två linjära avbildningar är unitärt ekvivalenta så är de konjugerade.

(d) Summan av två självadjungerade operatorer är självadjungerad.

(e) Adjunkten till en unitär operator är unitär

(f) Adjunkten till en normal operator är normal

(g) Om alla egenvärden till en linjär operator har absolutbeloppet 1 så är operatorn unitär eller ortogonal

(h) Om alla egenvärden till en normal operator är 1 så är operatorn identiteten

(i) En linjär operator kan bevara normen men inte skalärprodukten

Övning 8.2. (a) Diagonalisera matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ med ett ortogonalt koordinatbyte.

(b) Bestäm en kvadratrot till A dvs. en matris B med $B^2 = A$.

Övning 8.3. Bevisa att en normal operator vars egenvärden alla har absolutbeloppet 1 är unitär.

Övning 8.4. Antag att P är en operator med $P = P^2$. Visa att P är en ortogonal projektion på $\operatorname{Ran} P$ om och endast om P är självadjungerad.

Övning 8.5. Bevisa att en normal operator på ett komplext skalärproduktsrum är självadjungerad om och endast om alla egenvärden är reella.

Övning 8.6. Visa att varje normal operator på ett komplext skalärproduktsrum har en kvadratrot.

Övning 8.7. Bevisa Korollarium 8.2 utan att använda Sats 8.1.

Ledning. Använd induktion över dimensionen på vektorrummet. Låt $U = \text{Ran}(T - \lambda I)$ där λ är ett egenvärde. Då gäller $\dim U < \dim V$. Dessutom är U invariant med avseende på T. Så $T|_U$ har en övretriangulär matris i någon bas $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ på U. Utvidga till en bas $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ för V. T är övre triangulär i denna bas.

Förslag till svar

8.1 (a), (c), (d), (e), (f) och (h) är sanna, (b), (g), och (i) är falska

8.2 (a) $D = \text{diag}(1, 5)$ i basen $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$

(b) T.ex. $\pm\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{5}+1 & \sqrt{5}-1 \\ \sqrt{5}-1 & \sqrt{5}+1 \end{pmatrix}$ och $\pm\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 & \sqrt{5}+1 \\ \sqrt{5}+1 & \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}$

Kapitel 9

Jordans normalform

I förra kapitlet studerade vi de ”bästa” linjära operatorerna, dvs. de som kunde diagonaliseras i en ortonormerad bas. I det här kapitlet skall vi istället studera de ”värsta” operatorerna, de som inte har en bas av egenvektorer, och se hur vi kan välja en bas så att operatorns matris blir så enkel som möjligt.

$frngotheltal$k.

Lemma 9.1. *Antag att N är en nilpotent operator på ett vektorrum V med dimensionen n. Då gäller $N^n = 0$.*

Bevis. Vi skall visa att $N^n\mathbf{v} = \mathbf{0}$ för alla $\mathbf{v} \in V$. Om k är det minsta talet med $N^k\mathbf{v} = \mathbf{0}$ behöver visa att $k \leq n$. Antag att

$$c_0\mathbf{v} + c_1N\mathbf{v} + c_2N^2\mathbf{v} + \ldots + c_{k-1}N^{k-1}\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Genom att låta N^{k-1} verka på denna ekvation får vi $c_0N^{k-1}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, och eftersom $N^{k-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $c_0 = 0$. Nu låter vi N^{k-2} verka på ekvationen och får $c_1N^{k-1}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ och $c_1 = 0$. Genom att upprepa detta argument får vi $c_0 = c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$. Alltså är de k vektorerna $\mathbf{v}, N\mathbf{v}, N^2\mathbf{v}, \ldots, N^{k-1}\mathbf{v}$ linjärt oberoende. Men i ett n-dimensionellt vektorrum kan högst n vektorer vara linjärt oberoende och alltså har vi $k \leq n$. □

Definition 9.2. *Antag att λ är ett egenvärde till T. Då säger vi att $\mathbf{v}$ är en* ***generaliserad egenvektor*** *till T med egenvärdet λ om $(T - \lambda I)^k\mathbf{v} = \mathbf{0}$ för något heltal $k \geq 1$.*

Det ***generaliserad egenrummet****, GE_λ, består av alla de generaliserade egenvektorerna,*

$$GE_\lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{Ker}(T - \lambda I)^k\ .$$

Eftersom $(T-\lambda I)^k\mathbf{v}=\mathbf{0}$ ger att $(T-\lambda I)^kT\mathbf{v}=T(T-\lambda I)^k\mathbf{v}=T\mathbf{0}=\mathbf{0}$ ser vi att $T(GE_\lambda)\subseteq GE_\lambda$. Så GE_λ är ett invariant delrum till T. Låt $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m$ vara en bas för GE_λ. Då finns k_i så att $(T-\lambda I)^{k_i}\mathbf{e}_i=\mathbf{0}$. Om $k=\max_i k_i$ så gäller $(T-\lambda I)^k\mathbf{e}_i=\mathbf{0}$ för alla i vilket ger att $(T-\lambda I)^k\mathbf{v}=\mathbf{0}$ för alla $\mathbf{v}\in GE_\lambda$. Så genom att betrakta $T-\lambda I$ som en operator på GE_λ får vi följande resultat från Lemma 9.1.

Korollarium 9.3. *Om λ är ett egenvärde till operatorn T så gäller*

$$GE_\lambda=\operatorname{Ker}(T-\lambda I)^n\ .$$

Anmärkning 9.4. Argumentet visar det något skarpare resultatet att $GE_\lambda=\operatorname{Ker}(T-\lambda I)^m$ där $m=\dim GE_\lambda$.

Korollarium 9.5. *Antag att λ är ett egenvärde till T. Då gäller*

$$V=\operatorname{Ker}(T-\lambda I)^n\oplus\operatorname{Ran}(T-\lambda I)^n\ .$$

Bevis. Låt $V_1=\operatorname{Ker}(T-\lambda I)^n$ och $V_2=\operatorname{Ran}(T-\lambda I)^n$. Enligt dimensionsatsen gäller $\dim V_1+\dim V_2=\dim V=n$. Så det räcker att visa att $V_1\cap V_2=\{\mathbf{0}\}$. Låt $\mathbf{v}\in V_1\cap V_2$. Att $\mathbf{v}\in V_1$ betyder att $(T-\lambda I)^n\mathbf{v}=\mathbf{0}$ och att $\mathbf{v}\in V_2$ betyder att $\mathbf{v}=(T-\lambda I)^n\mathbf{u}$ för något $\mathbf{u}$. Men då gäller $(T-\lambda I)^{2n}\mathbf{u}=(T-\lambda I)^n\mathbf{v}=\mathbf{0}$. Korollarium 9.3 ger $(T-\lambda I)^n\mathbf{u}=\mathbf{0}$ och alltså $\mathbf{v}=(T-\lambda I)^n\mathbf{u}=\mathbf{0}$. □

Observera att även V_2 är invariant med avseende på T. Ty om $\mathbf{v}\in V_2$ så $\mathbf{v}=(T-\lambda I)^n\mathbf{u}$ för något $\mathbf{u}$. Alltså är $T\mathbf{v}=T(T-\lambda I)^n\mathbf{u}=(T-\lambda I)^nT\mathbf{u}$ dvs. $T\mathbf{v}\in V_2$ och $T(V_2)\subseteq V_2$.

Vi observerar också att ingen nollskild vektor i V_2 ligger GE_λ.

Sats 9.6. *Låt T vara en operator på V med egenvärdena $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$. Då gäller*

$$V=GE_{\lambda_1}\oplus GE_{\lambda_2}\oplus\ldots\oplus GE_{\lambda_r}\ .$$

Alltså har varje operator en bas av generaliserade egenvektorer.

Bevis. Vi bevisar satsen med induktion över dimensionen på V. Om $n=1$ är satsen uppenbarligen sann.

Så låt $n\geq 2$ och antag att satsen är sann för alla vektorrum med dimension mindre än n. T har ett egenvärde λ_1. Låt $V_1=\operatorname{Ker}(T-\lambda_1 I)^n$ och $V_2=\operatorname{Ran}(T-\lambda_1 I)^n$. Enligt Korrolarium 9.5 gäller $V=V_1\oplus V_2$. Om λ_1 är det enda egenvärdet är $V_2=\{\mathbf{0}\}$ och vi har $V=GE_{\lambda_1}$ och beviset är klart. Annars kan vi, eftersom V_2 är invariant, betrakta T som en operator på V_2 med egenvärdena $\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_r$. Enligt induktionsantagandet gäller $V_2=GE_{\lambda_2}\oplus GE_{\lambda_3}\oplus\ldots\oplus GE_{\lambda_r}$ och vi får

$$V=GE_{\lambda_1}\oplus V_2=GE_{\lambda_1}\oplus GE_{\lambda_2}\oplus GE_{\lambda_3}\oplus\ldots\oplus GE_{\lambda_r}\ .$$

□

Korollarium 9.7. *Låt T vara en operator på V med egenvärdena $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Då finns en bas B på V så att T har en blockdiagonal matris*

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdot & \cdot & & 0 \\ 0 & A_2 & & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

där varje block är en övretriangulär matris av formen

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & * & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ 0 & \lambda_j & & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & * \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

Bevis. Låt T_i vara restriktionen av T till GE_{λ_j}. Enligt Korollarium 8.2 kan vi välja en bas på GE_{λ_j} så att matrisen för T_i blir övretriangulär. Eftersom T_i endast har egenvärdet λ_j kommer matrisen att ha λ_j på diagonalen. Gör vi detta val av basvektorer i vart och ett av delrummen GE_{λ_j} bildar de tillsammans en bas där $[T]_B$ får den önskade formen. $\square$

Satsen ger att det karakteristiska polynomet till T är $p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{d_1}$ $(\lambda_2 - \lambda)^{d_2} \cdots (\lambda_r - \lambda)^{d_r}$ där $d_j = \dim GE_{\lambda_j}$. Så $n = \operatorname{grad} p = d_1 + \ldots + d_r$. Detta medför att den algebraiska multipliciteten m_λ hos ett egenvärde λ är lika med $\dim GE_\lambda$. Genom att betrakta T som en operator på GE_λ får vi från Lemma 9.1 att $(T - \lambda_1 I)^{m_\lambda} = 0$ på GE_λ och att $GE_\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda I)^{m_\lambda}$.

En viktig konsekvens av Korrolarium 9.7 är att i lämpliga koordinater så har operatorn e^{tT} också en blockdiagonal matris med blocken e^{tA_j}. Nu är $A_j = \lambda_j I + (A_j - \lambda_j I) = \lambda_j I + N_j$ där $N_j^{m_{\lambda_j}} = 0$. Detta ger $e^{tA_j} = e^{t\lambda_j} e^{tN_j}$ och potensserien som definierar e^{tN_j} innehåller bara termer av grad högst m_{λ_j}. Så att beräkna e^{tT} är en ändlig process.

9.1 Jordans normalform

Vi börjar med följande exempel.

Exempel 9.8. Bestäm en bas så att följande operatorer får så enkel matris som möjligt.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alla tre matriserna har endast egenvärdet 2. Så $GE_2 = \mathbb{R}^3$ och vi har $A_i = 2I + (A_i - 2I) = 2I + N_i$ där N_i är nilpotent. Låt $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ vara standardbasen på $\mathbb{R}^3$.

För den första matrisen har vi $N_1\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$, $N_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$, $N_1\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$ och $N_1^2\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$. Så i basen $\mathbf{v}_1 = N_1\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_2$ har N_1 matrisen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ och alltså är } J_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

För den andra matrisen har vi $N_2\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$, $N_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$, $N_2\mathbf{e}_3 = (2,1,0)$ och $N_2^2\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$. Så i basen $\mathbf{v}_1 = N_2\mathbf{e}_3 = (2,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_2$ har N_2 matrisen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ och alltså är } J_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

För den tredje matrisen har vi $N_3\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$, $N_3\mathbf{e}_2 = (2,0,0)$, $N_3^2\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$, $N_3\mathbf{e}_3 = (3,1,0)$ och $N_3^2\mathbf{e}_3 = (2,0,0)$ och $N_3^3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$. Så i basen $\mathbf{v}_1 = N_3^2\mathbf{e}_3 = (2,0,0)$, $\mathbf{v}_2 = N_3\mathbf{e}_3 = (3,1,0)$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3$ har N_3 matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ och alltså är } J_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

I dessa exempel har vi bestämt den så kallade Jordans normalform för de tre operatorerna A_1, A_2 och A_3.

Definition 9.9. *En bas B sådan att*

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & A_r \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

där varje block är en övretriangulär matris av formen

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} . \tag{9.2}$$

kallas en ***Jordanbas*** *för T och matrisen sägs vara på* ***Jordans normalform****.*

Matrisen A_j kan vara en 1×1-matris (som kan vara 0).

Följande sats är en skärpning av Korollarium 9.7.

Sats 9.10. *Varje operator T på ett ändligtdimensionellt komplext vektorrum V har en Jordanbas.*

Precis som i beviset av Korollarium 9.7 kan vi betrakta T som en operator på GE_{λ_i} och visa att denna kan skrivas som A_j ovan genom att använda att $T - \lambda_j I$ är nilpotent på GE_{λ_i}.

Beviset av Sats 9.10 är förmodligen det svåraste beviset i kursen. Så låt oss först titta på två exempel som visar på idén i beviset. Men först lite terminologi.

Om N är nilpotent så finns för varje vektor ett minsta tal d så att $N^d\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Vektorerna $\mathbf{v}, N\mathbf{v}, N^2\mathbf{v}, \ldots, N^{d-1}\mathbf{v}$ kallas för en *cykel* av generaliserade egenvektorer med startvektor $\mathbf{v}$, slutvektor $\mathbf{v}^d = N^{d-1}\mathbf{v}$ och ordning eller längd d.

Anmärkning 9.11. Varje vektor i V är en generaliserad egenvektor till N med egenvärdet 0 så terminologin är onödigt krånglig.

Exempel 9.12. Låt $S : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ vara definierad genom $S(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, x_1, x_2, x_3, x_4)$. Om $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_5$ är standardbasen på $\mathbb{R}^5$ så gäller $S\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$, $S^2\mathbf{e}_1 = S\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, $S^3\mathbf{e}_1 = S\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_4$, $S^4\mathbf{e}_1 = S\mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_5$ och $S^5\mathbf{e}_1 = S\mathbf{e}_5 = \mathbf{0}$. Så $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_5$ är en cykel med starvektor $\mathbf{e}_1$ och maximal längd 5. I basen $B = \{\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_4, \ldots, \mathbf{e}_1\}$ (observera ordningen) har S matrisen

$$[S]_B = \begin{pmatrix} [S\mathbf{e}_5]_B & \ldots & [S\mathbf{e}_1]_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & [\mathbf{e}_5]_B & \ldots & [\mathbf{e}_2]_B \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exempel 9.13. Låt $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ vara definierad genom $T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, x_1, x_2, 0, x_4)$. Då gäller $T\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$, $T^2\mathbf{e}_1 = T\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, $T^3\mathbf{e}_1 = T\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$ samt $T\mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_5, T\mathbf{e}_5 = \mathbf{0}$. Så startvektorn $\mathbf{e}_1$ ger en cykel av ordning 3. Detta är (Varför då?) en cykel med maximal längd till T. Vektorn $\mathbf{e}_4$ ger en cykel av ordning 2. Detta är den längsta cykeln bland de startvektorer som inte har någon komponent i $\text{Span}(\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_1, T^2\mathbf{e}_1)$. I basen $B = \{T^2\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4\} = \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_4\}$ (ordningen är viktig) har vi

$$[T]_B = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

I det sista exemplet observerar vi att de två cyklerna $\mathcal{C}_1 = \mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_1, T^2\mathbf{e}_1$ och $\mathcal{C}_2 = \mathbf{e}_4, T\mathbf{e}_4$ uppfyller $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$ och att vektorerna i $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ är linjärt oberoende. Detta är ingen tillfällighet.

Lemma 9.14. *Låt N vara en nilpotent operator och $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_k$ vara cykler av ordning d_i, $i = 1, \ldots, k$. Om slutvektorerna är linjärt oberoende så gäller $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j = \emptyset$ om $i \neq j$, och vektorerna i $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_k$ är linjärt oberoende.*

Bevis. Låt $\mathcal{C}_i = \{\mathbf{v}^i, N\mathbf{v}^i, N^2\mathbf{v}^i, \ldots, N^{d_i-1}\mathbf{v}^i\} = \{\mathbf{v}_1^i, \mathbf{v}_2^i, \ldots, \mathbf{v}_{d_i}^i\}$ och ordna dessa cykler så att $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_k$.

Vi skall bevisa satsen med induktion med avseende på $n = d_1+d_2+\ldots+d_k$. Observera att om en vektor finns med i flera cykler kommer den att räknas flera gånger. (Lemmat visar att detta inte är möjligt men vi kan inte anta det nu.)

Om $n = 1$ är satsen uppenbarligen sann.

Antag nu att satsen gäller för alla nilpotenta operatorer och alla cykler med totalantalet av alla vektorer i alla cykler strikt mindre än n. (Blev det inte en fin mening?)

Om $U = \operatorname{Span}(\mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_k)$ så gäller $N(U) \subset U$. Så genom att betrakta N som en operator på U ser vi att vi kan anta att $\operatorname{Span}(\mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_k) = V$. Låt $W = \operatorname{Ran} N$ och $\tilde{\mathcal{C}}_i = N(\mathcal{C}_i) \setminus \{\mathbf{0}\}$. Om $d_i > i$ så är $\tilde{\mathcal{C}}_i = \{N\mathbf{v}_1^i, \ldots, N^{d_i-1}\mathbf{v}_1^i, N^{d_i}\mathbf{v}_1^i\} = \{\mathbf{v}_2^i, \ldots, \mathbf{v}_{d_i}^i\}$ och om $d_i = 1$ så är $\tilde{\mathcal{C}}_i = \emptyset$. Vi observerar också att om l är det största index med $\tilde{\mathcal{C}}_l \neq \emptyset$, så är $\operatorname{Span}(\tilde{\mathcal{C}}_1 \cup \ldots \cup \tilde{\mathcal{C}}_l) = W$. Eftersom slutvektorerna i $\tilde{\mathcal{C}}_1 \cup \ldots \cup \tilde{\mathcal{C}}_l$ är en delmängd till slutvektorerna i $\mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_k$ är de linjärt oberoende. Så vi kan använda induktionstagandet och dra slutsatsen att vektorerna i $\tilde{\mathcal{C}}_1 \cup \ldots \cup \tilde{\mathcal{C}}_l$ är linjärt oberoende.

Att vektorerna i $\mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_k$ också är linjärt oberoende följer nu genom att kontrollera dimensionerna. Vi har $\dim W = \tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 + \ldots + \tilde{d}_l = n - k$ eftersom vi för att bilda $\tilde{\mathcal{C}}_i$ strök en vektor i varje $\mathcal{C}_i$. Dessutom gäller $N\mathbf{v}_{d_i}^i = 0$, $i = 1, \ldots, k$, och eftersom slutvektorerna $\mathbf{v}_{d_i}^i$ är linjärt oberoende så är $\dim \operatorname{Ker} N \geq k$. Dimensionssatsen ger $\dim V = \dim \operatorname{Ran} N + \dim \operatorname{Ker} N = \dim W + \dim \operatorname{Ker} N \geq n - k + k = n$. Men $\dim V = \dim \operatorname{Span}(\mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_k) \leq d_1 + \ldots + d_k = n$. Alltså är $\dim V = n$. Så $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j = \emptyset$ och vektorerna i $\mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_k$ spänner V och är n stycken. Därför är de en bas och alltså speciellt linjärt oberoende. □

Lemma 9.15. *Låt $N : V \to V$ vara nilpotent. Då har V en bas som består av cykler av generaliserade egenvektorer till N.*

Bevis. Vi bevisar satsen med induktion med avseende på $n = \dim V$. Om $n = 1$ är satsen självklart sann. Så antag att $n \geq 2$ och att satsen är sann för varje nilpotent operator på ett vektorrum med dimension strikt mindre än n.

Låt $W = \operatorname{Ran} N$. Då N är nilpotent är $\operatorname{Ker} N \neq \{\mathbf{0}\}$ så $\dim \operatorname{Ker} N \geq 1$. Dimensionssatsen ger $\dim W = \dim \operatorname{Ran} N < \dim \operatorname{Ran} N + \dim \operatorname{Ker} N = n$. Dessutom är W ett invariant delrum till V. Därför kan vi betrakta N som en operator på W. Enligt induktionsantagandet finns cykler $\mathcal{C}_i$, $i = 1, \ldots, k$ så att $\mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_k$ är en ON-bas för W.

Låt cyklerna vara $\mathcal{C}_i = \{\mathbf{v}^i, N\mathbf{v}^i, N^2\mathbf{v}^i, \ldots, N^{d_i-1}\mathbf{v}^i\} = \{\mathbf{v}^i_1, \mathbf{v}^i_2, \ldots, \mathbf{v}^i_{d_i}\}$ där $\mathbf{v}^i \in W$ och $N^{d_i}\mathbf{v}^i = \mathbf{0}$. Eftersom $\mathbf{v}^i \in$Ran N finns en vektor $\mathbf{u}^i \in V$ med $N\mathbf{u}^i = \mathbf{v}^i$. Låt nu $\tilde{\mathcal{C}}_i = \{\mathbf{u}^i, N\mathbf{u}^i, N^2\mathbf{u}^i, \ldots, N^{d_i-1}\mathbf{v}^i\} = \{\mathbf{u}^i, \mathbf{v}^i_1, \mathbf{v}^i_2, \ldots, \mathbf{v}^i_{d_i}\}$. Eftersom slutvektorerna $\mathbf{v}^i_{d_i}$ ligger i $\mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_k$ är de linjärt oberoende. Slutvektorerna ligger i $\operatorname{Ker} N$ och genom att eventuellt lägga till vektorer $\mathbf{v}^{k+i}_1$, $i = 1, \ldots, r$ får vi en bas $\mathbf{v}^1_{d_1}, \ldots, \mathbf{v}^k_{d_k}, \mathbf{v}^{k+1}, \ldots, \mathbf{v}^{k+r}$ för $\operatorname{Ker} N$. Vektorerna $\mathbf{v}^{k+i}$, $i = 1, \ldots, r$ bildar cykler $\tilde{\mathcal{C}}_{k+i}$ av generaliserade egenvektorer av längd 1. Så slutvektorerna i cyklerna $\tilde{\mathcal{C}}_1, \ldots, \tilde{\mathcal{C}}_k, \tilde{\mathcal{C}}_{k+1}, \ldots, \tilde{\mathcal{C}}_{k+r}$ är linjärt oberoende. Enligt Lemma 9.14 är därför $\tilde{\mathcal{C}}_1 \cup \ldots \cup \tilde{\mathcal{C}}_{k+r}$ en linjärt oberoende mängd av vektorer i V.

För att se att de är en bas för V återstår det att visa att de är n stycken. Vi har $\#(\mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_k) =$dim Ran N, $\#(\tilde{\mathcal{C}}_1 \cup \ldots \cup \tilde{\mathcal{C}}_k) =$dim Ran $N + k$ och $\#(\tilde{\mathcal{C}}_1 \cup \ldots \cup \tilde{\mathcal{C}}_{k+r}) = \dim \operatorname{Ran} N + k + r$. Eftersom slutvektorerna i $\tilde{\mathcal{C}}_1, \ldots, \tilde{\mathcal{C}}_{k+r}$ är en bas för $\operatorname{Ker} N$ har vi $\dim \operatorname{Ker} N = k+r$. Så $n =$dim $V =$dim Ker $N+$dim Ran N $= k + r+$dim Ran $N = \#(\tilde{\mathcal{C}}_1 \cup \ldots \cup \tilde{\mathcal{C}}_{k+r})$.

$\square$

Med hjälp av Lemma 9.15 kan vi nu bevisa följande struktursats för nilpotenta operatorer.

Proposition 9.16. *Varje nilpotent operator N har en bas B sådan att $[N]_B = diag(N_1, N_2, \ldots, N_m)$ är blockdiagonal och*

$$N_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.3}$$

Bevis. Enligt Lemma 9.15 finns cykler $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$, av generaliserade egenvektorer till N, så att vektorerna i $\mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_k$ är en bas för V. Om $\mathcal{C}_i = \{\mathbf{v}_1^i, \mathbf{v}_2^i, \ldots, \mathbf{v}_{d_i}^i\}$ och B är basen som består alla dessa vektorer i omvänd ordning

$$\mathbf{v}_{d_1}^1, \ldots, \mathbf{v}_1^1, \quad \mathbf{v}_{d_2}^2, \ldots, \mathbf{v}_1^2, \quad \ldots, \quad \mathbf{v}_{d_k}^k, \ldots, \mathbf{v}_1^k$$

så får N den önskade formen.

□

Nu har vi alla ingredienser som behövs för att bevisa att varje operator har en matris på Jordans normalform.

Bevis av Sats 9.10. Enligt Sats 9.6 har vi

$$V = GE_{\lambda_1} \oplus GE_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus GE_{\lambda_r}$$

där λ_i är egenvärdena till T. Låt $T_i = T|_{GE_{\lambda_i}}$ och $N_i = T - \lambda_i I$. Då är N_i en nilpotent operator på GE_{λ_i}. Så enligt Proposition 9.16 finns en bas B_i på GE_{λ_i} så att N_i har formen (9.3). Så $T_i = \lambda_i I + N_i$ har formen (9.2). Om vi låter B vara unionen av baserna B_i kommer $[T]_B$ att få den önskade formen (9.1).

□

Övning 9.1. Bestäm alla generaliserade egenvektorer till matriserna

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Övning 9.2. Vad är Jordans normalform för matriserna i Övning 9.1?

Övning 9.3. Vad är Jordans normalform för matriserna

$$(a)\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ och } (b)\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}?$$

Ledning. Matriserna har bara egenvärdena 2 och 4.

Övning 9.4. Visa att om ST är nilpotent så är TS nilpotent.

Övning 9.5. Visa att om N är nilpotent och självadjungerad så är $N = 0$.

Övning 9.6. Bevis eller motexempel;

$$V = \operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Ran} T\ .$$

Övning 9.7. Antag att V är ett komplext vektorrum med dimension n. Visa att om $\operatorname{Ker} T^{n-2} \neq \operatorname{Ker} T^{n-1}$ så har T högst två olika egenvärden.

Övning 9.8. Antag att matrisen till operatorn T i basen $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ är på Jordans normalform. Beskriv matrisen i basen $\mathbf{e}_n, \ldots, \mathbf{e}_1$.

Förslag till svar

9.1 (a) $\mathbb{R}^2$, (b) $\operatorname{Span}(1, -1)$ och $\operatorname{Span}(0, 1)$,
(c) $\operatorname{Span}((1, 1, 0), (1, 0, -1))$ och $\operatorname{Span}(0, 0, 1)$

9.2 (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9.3 (a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

9.6 Falskt. Motexempel t.ex. $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Kapitel 10

Diagonaliserbarhet–igen

Spektralsaten ger en karakterisering av de linjära avbildningarna $T : V \to V$ som är ortogonalt diagonaliserbara.

Sats 3.13 ger en karakterisering av när en operator på V är diagonaliserbar, men villkoret är inte enkelt att kontrollera. Redan att bestämma en operators egenvärden då $\dim V$ är stort är svårt.

I detta kapitel skall vi ge ett annat villkor för när T är diagonaliserbar. Villkoret är att det så kallade minimalpolynomet till operatorn T bara har enkla nollställen.

Minimalpolynomet är beräkningsbart och man kan avgöra om det har enkla nollställen med Euklides algoritm.

Det mesta i detta kapitel gäller för både komplexa och reella vektorrum. Hur man avgör om minimalpolynomet bara har reella nollställen diskuteras i avsnitt 10.4.

10.1 Minimalpolynomet

Låt $T : V \to V$ vara en operator på ett rum av dimensionen n. Betrakta vektorrummet $L(V)$ av alla linjära operatorer på V. Detta är ett vektorrum av dimensionen n^2. För att se det väljer vi en bas i V och betraktar isomorfin $T \to [T]_B$ mellan $L(V)$ och $M_n = M_{n\times n}$, de kvadratiska matriserna med n rader och kolonner. Enligt Exempel 1.7,4. har M_n dimensonen n^2 och påståendet följer.

Betrakta de n^2+1 linjära operatorerna (vektorerna i $L(V)$) $I, T, T^2, \ldots, T^{n^2}$. De är fler än dimensionen på $L(V)$ och alltså linjärt beroende. Låt d vara det minsta tal så att $I, T, T^2 \ldots, T^d$ är linjärt beroende. Då finns skalärer $\tilde{a}_i$, inte alla noll, med

$$\tilde{a}_d T^d + \tilde{a}_{d-1} T^{d-1} + \ldots + \tilde{a}_1 T + \tilde{a}_0 I = O\ .$$

Eftersom d är minimalt måste $\tilde{a}_d \neq 0$. Vi kan normalisera genom att dividera med $\tilde{a}_d$ och sätta

$$m_T(\lambda) = \lambda^d + a_{d-1}\lambda^{d-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \ .$$

Då gäller $m_T(T) = O$.

Definition 10.1. *Minimalpolynomet till en operator $T : V \to V$ är det polynom*

$$m_T(\lambda) = \lambda^d + a_{d-1}\lambda^{d-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 I$$

med minimal grad och ledande koefficient ett som uppfyller $m_T(T) = O$.

Diskussionen ovan visar att minimalpolynomet existerar. Det är också entydigt. Ty om $\tilde{m}_T$ är ett annat minimalpolynom så är $r(\lambda) = m_T(\lambda) - \tilde{m}_T(\lambda)$ ett polynom av grad $r < d$ och $r(T) = O$. Detta motsäger minimaliteten hos d, så $r = 0$ och $m_T = \tilde{m}_T$.

Följande sats karakteriserar de polynom som uppfyller $p(T) = O$.

Sats 10.2. *Låt p vara ett polynom. Då gäller $p(T) = O$ om och endast om minimalpolynomret m_T delar p.*

Bevis. Ena hållet är trivialt. (Vilket?)

För att visa satsen åt andra hållet antar vi att $p(T) = O$. Divisionsalgoritmen ger $p(\lambda) = q(\lambda)m_T(\lambda) + r(\lambda)$ där $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} m_T$. Så $r(T) = p(T) - q(T)m_T(T) = O$. Minimaliteten hos $\operatorname{grad} m_T$ ger att r är nollpolynomet så m_T delar p. □

Ur minimalpolynomet kan man utläsa egenvärdena till operatorn T.

Sats 10.3. *Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator. Då sammanfaller rötterna till minimalpolynomet med egenvärdena till T.*

Bevis. Antag först att $m_T(\lambda) = 0$. Då gäller $m_T(z) = (z - \lambda)q(z)$ för något polynom q. Eftersom $m_T(T) = O$ gäller $m_T(T)\mathbf{v} = (T - \lambda I)q(T)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ för alla $\mathbf{v}$. Eftersom $\operatorname{grad} q < \operatorname{grad} m_T$ gäller $q(T) \neq O$. Så det finns en vektor $\mathbf{v}$ med $q(T)\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Så om $\mathbf{u} = q(T)\mathbf{v}$ gäller $(T - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Så λ är ett egenvärde till T.

Omvänt om λ är ett egenvärde till T med egenvektor $\mathbf{v}$ så gäller $T^k\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v}$ för $k \geq 1$. Eftersom $m_T(T) = O$ får vi

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = m_T(T)\mathbf{v} &= T^d\mathbf{v} + a_{d-1}T^{d-1}\mathbf{v} + \ldots + a_1T\mathbf{v} + a_0I\mathbf{v} \\ &= \lambda^d\mathbf{v} + a_{d-1}\lambda^{d-1}\mathbf{v} + \ldots + a_1\lambda\mathbf{v} + a_0\mathbf{v} = m_T(\lambda)\mathbf{v} \ ,\end{aligned}$$

och då $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ får vi $m_T(\lambda) = 0$. □

10.2 Cayley-Hamiltons sats

Diskussionen ovan visar att minimalpolynomet har grad högst n^2. Detta kan skärpas till att graden är högst n vilket förenklar beräkningen av minimalpolynomet m_T.

Sats 10.4 (Cayley-Hamiltons sats)**.** *Det karakteristiska polynomet p_T till T uppfyller $p_T(T) = O$.*

Tillsammans med Sats 10.2 ger Cayley-Hamiltons sats att m_T delar det karakteristiska polynomet p_T. Alltså är $\operatorname{grad} m_T \leq \operatorname{grad} p_T = n$ och redan $I, T, T^2 \ldots, T^n$ är linjärt oberoende.

Övning 10.1. Varför är följande bevis av Cayley-Hamiltons sats fel?

Bevis. Låt $A = [T]_B$. Då gäller $p_T(A) = \det(A - \lambda I)\big|_{\lambda=A} = \det(A - A) = \det O = 0$. □

Vi observerar först att om $[T]_B = D =$diag$(\lambda_1 \cdots, \lambda_n)$ är en diagonalmatris så gäller $[p_T(T)]_B = p_D(D) =$diag$(p_T(\lambda_1) \cdots, p_T(\lambda_n))$ och alltså ger Sats 10.3 att $p_T(T) = 0$. Mer allmänt följer satsen om T kan diagonaliseras, $[T]_B = PDP^{-1}$, eftersom $p_T([T]_B) = P\, p_T(D) P^{-1} = POP^{-1} = O$.

Det går att med analytiska metoder bygga ut denna observation till ett vattentätt bevis. Vi ger först en skiss av hur detta går till och ger sedan ett bevis av satsen som bara använder linjär algebra.

När T inte kan diagonaliseras börjar vi med att, enligt Schurs sats, välja en bas så att $[T]_B$ blir övre triangulär. Då består diagonalen av egenvärdena $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Om dessa egenvärden alla är olika kan T diagonaliseras och $p_T(T) = O$ följer. Annars kan vi välja $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$, $\epsilon \to \mathbf{0}$ så att hela tiden $\lambda_1 + \epsilon_1, \ldots, \lambda_n + \epsilon_n$ är olika tal. Låt A_ϵ vara den matris vi får från $[T]_B$ genom att ersätta λ_i med $\lambda_i + \epsilon_i$. Då blir A_ϵ diagonaliserbar och enligt ovan gäller $p_{A_\epsilon}(A_\epsilon) = O$. Vi avslutar nu beviset genom att låta $\epsilon \to \mathbf{0}$ och får $p_T(A) = O$.

Att fylla i detaljerna i beviset av att $p_T([T]_B) = \lim_{\epsilon \to \mathbf{0}} p_{A_\epsilon}(A_\epsilon) = O$ kräver viss vana vid "riktig" analys, men bör vara enkelt för den som t.ex. har läst kursen *Reell analys.*

Bevis av Cayley-Hamiltons sats. Välj en bas $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ så att $A = [T]_B$ blir övre triangulär, med egenvärdena $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ på diagonalen. Sätt $E_k = \operatorname{Span}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$. Eftersom A är övre triangulär gäller $AE_j \subset E_j$ och därmed $(A - \lambda I)E_j \subset E_j$ för alla λ. För $(A - \lambda_k I)E_k$ kan vi säga mer; eftersom $A - \lambda_k I$ är 0 på plats kk gäller $(A - \lambda_k I)\mathbf{e}_k \in E_{k-1}$. Så

$$(A - \lambda_k I)E_k \subset E_{k-1}\ k \geq 1, \text{ och } (A - \lambda_1 I)E_1 = \{\mathbf{0}\}\,. \tag{10.1}$$

Betrakta $\mathbf{v}_k = (A - \lambda_{k+1}I)\ldots(A - \lambda_n I)\mathbf{v}$, $k = 1, \ldots, n-1$, där $\mathbf{v}$ är en godtycklig vektor i $\mathbb{C}^n$. På grund av (10.1) får vi rekursivt att $\mathbf{v}_{n-1}, \ldots, \mathbf{v}_1$ uppfyller

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{v}_{n-1} & = & (A - \lambda_n I)\mathbf{v} \in E_{n-1} \\ \vdots & & \\ \mathbf{v}_k & = & (A - \lambda_{k+1} I)\mathbf{v}_k \in E_{k-1} \\ \vdots & & \\ \mathbf{v}_1 & = & (A - \lambda_2 I)\mathbf{v}_2 \in E_1 \\ & \text{och} & (A - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}\,. \end{array}$$

Så $(A - \lambda_1)\ldots(A - \lambda_k I)\ldots(A - \lambda_n I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Men $p_T(\lambda) = p_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_k)\ldots(\lambda - \lambda_n)$ och vi får $P_T(A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ för alla $\mathbf{v}$ dvs. $P_T(T) = O$. □

Anmärkning 10.5. Cayley-Hamiltons sats gäller både i komplexa och reella vektorrum. I beviset av satsen använde vi Schurs sats som bara gäller i komplexa vektorrum. Men om vi i det reella fallet väljer en godtycklig bas och låter A vara matrisen till T i denna bas så kan A utvidgas till en linjär avbildning på $\mathbb{C}^n$. Det karakteristiska polynomet $p_T(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ ändras inte av denna utvidgning. Beviset ovan visade att $p_T(A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ för alla $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ och alltså speciellt för alla $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ så $P_T(T) = O$.

10.3 Karakterisering av diagonaliserbara operatorer

Vi börjar med att diskutera en alternativ metod att beräkna minimalpolynomet. Låt $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vara en vektor i V. De $n+1$ vektorerna $\mathbf{v}, T\mathbf{v}, \ldots, T^n\mathbf{v}$ är linjärt beroende. Låt $d = d_{\mathbf{v}}$ vara det minsta tal så att $\mathbf{v}, T\mathbf{v}, \ldots, T^d\mathbf{v}$ är linjärt beroende. Då finns tal $a_i = a_{i,\mathbf{v}}$ så att

$$m_{T,\mathbf{v}}(\lambda) = \lambda^d + a_{d-1}\lambda^{d-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

uppfyller $m_{T\mathbf{v}}(T)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. $m_{T,\mathbf{v}}$ är det polynom av lägst grad och ledande koefficient 1 så att $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} m_{T,\mathbf{v}}(T)$.

Om $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är två vektorer i V, och $p(\lambda)$ är en gemensam multipel till $m_{T,\mathbf{v}_1}(\lambda)$ och $m_{T,\mathbf{v}_2}(\lambda)$ så ligger både $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ i $\operatorname{Ker} p(T)$. Mer allmännt gäller att om $p(\lambda)$ är en gemensam multipel till $m_{T,\mathbf{v}_1}, m_{T,\mathbf{v}_2}, \ldots, m_{T,\mathbf{v}_k}$ så ligger alla vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ i $\operatorname{Ker} p(T)$. Om speciellt $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ är en bas för V får vi att alla basvektorerna uppfyller $p(T)\mathbf{b}_k = \mathbf{0}$. Eftersom $\operatorname{Ker} p(T)$ är ett delrum till V följer $p(T)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ för alla V och alltså $p(T) = O$.

Sats 10.6. *Låt $T : V \to V$ var en linjär operator på V och $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ en bas för V. Då är minimalpolynomet m_T den minsta gemensamma multipeln till $m_{T,\mathbf{b}_1}, m_{T,\mathbf{b}_2}, \dots, m_{T,\mathbf{b}_n}$.*

Bevis. Låt p vara den minsta gemensamma multipeln till $m_{T,\mathbf{b}_1}, m_{T,\mathbf{b}_2}, \dots,$ $m_{T,\mathbf{b}_n}$. Enligt ovan gäller $p(T) = O$ och enligt Sats 10.2 delar m_T p.

Omvänt, ger division att $m_T = q_k m_{T,\mathbf{b}_k} + r_k$, $k = 1, \dots, n$ där $\operatorname{grad} r_k < \operatorname{grad} m_{T,\mathbf{b}_k}$.

Detta ger

$$\mathbf{0} = m_T(T)\mathbf{b}_k = q_k(T)m_{T,\mathbf{b}_k}(T)\mathbf{b}_k + r_k(T)\mathbf{b}_k = r_k(T)\mathbf{b}_k$$

och minimaliteten av graden på $m_{T,\mathbf{b}_k}$ ger $r_k = 0$. Alltså delar $m_{T,\mathbf{b}_k}$ m_T för alla k. Därför delar deras minsta gemensamma multipel p också m_T.

Så p och m_T delar varandra och då båda har ledande koefficient 1 gäller $m_T = p$. $\square$

Vi kan nu formulera kapitlets huvudsats.

Sats 10.7. *Låt V vara ett komplext vektorrum och m_T minimalpolynomet till den linjära operatorn $T : V \to V$. Då är T diagonaliserbar om och endast om m_T bara har enkla nollställen.*

På grund av Sats 10.3 kan detta formuleras som att T är diagonaliserbar om och endast om m_T har formen $m_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_k)$ där $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ är de *olika* egenvärdena till T.

Bevis. Vi observerar först att om $\mathbf{v}$ är en egenvektor med egenvärdet λ så är $(T - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ och alltså $m_{T,\mathbf{v}}(z) = z - \lambda$. Om T är diagonaliserbar finns en bas av egenvektorer $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$. Så m_T, den minsta gemensamma multipeln till $m_{T,\mathbf{b}_k} = z - \lambda_k$ är $(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_n)$ där λ_j är de olika egenvärdena.

Omvänt observerar vi om $m_{T,\mathbf{v}}(z)$ är ett förstagradspolynom, $m_{T,\mathbf{v}}(z) = z - \lambda$, så gäller $m_{T,\mathbf{v}}(T)\mathbf{v} = (T - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, dvs. $\mathbf{v}$ är en egenvektor med egenvärdet λ.

Om T inte är diagonaliserbar finns en generaliserad egenvektor i V som inte är en egenvektor. Låt $\mathbf{v}$ uppfylla $(T - \lambda I)\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ och $(T - \lambda I)^2\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Så polynomet $q(z) = (z - \lambda)^2$ uppfyller $q(T)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Som i Sats 10.2 ger detta att $m_{T,\mathbf{v}}(z)$ delar $q(z)$. Så $m_{T,\mathbf{v}}(z) = (z - \lambda)^k$ där $k = 1$ eller $k = 2$. Men $\mathbf{v}$ är ingen egenvektor så $k \neq 1$. Alltså är $k = 2$ och $m_{T,\mathbf{v}}(z) = (z - \lambda)^2$. $\square$

Följande sats är en enkel observationen och beviset lämnas som övning.

Sats 10.8. *Ett polynom P saknar multipla nollställen om och endast om* $\mathrm{SGD}(P, P') = 1$.

Att $\mathrm{SGD}(P, P') = 1$ betyder att det inte finns något ickekonstant polynom som delar både P och P'. $\mathrm{SGD}(P, P')$ kan bestämmas med Euklides algoritm.

Korollarium 10.9. *En linjär operator T på ett komplext vektorrum är diagonaliserbar om och endast om* $\mathrm{SGD}(m_T, m_T') = 1$.

Om V är ett reellt vektorrum krävs förutom att att m_T endast har enkla nollställen dessutom att alla dessa är reella.

Korollarium 10.10. *En linjär operator T på ett reellt vektorrum är diagonaliserbar om och endast om* $\mathrm{SGD}(m_T, m_T') = 1$ *och alla nollställen till m_T är reella.*

I nästa avsnitt beskrivs en algoritm för att avgöra när nollställena är reella.

10.4 Sturms sats

Låt P vara ett reellt polynom med enkla nollställen. Sätt $P_0 = P$, $P_1 = P'$ och betrakta Euklides algoritm på P_0, P_1.

$$
\begin{aligned}
P_0 &= Q_1 P_1 - P_2 \\
P_1 &= Q_2 P_2 - P_3 \\
&\vdots \\
P_{k-1} &= Q_k P_k - P_{k+1} \\
&\vdots \\
P_{m-2} &= Q_{m-1} P_{m-1} - P_m \\
P_{m-1} &= Q_m P_m
\end{aligned}
$$

där $\operatorname{grad} P_{k+1} < \operatorname{grad} P_k$ (observera minustecknen). Då gäller att $P_m = \mathrm{SGD}(P_0, P_1)$ är en konstant.

Låt $\mathbf{s}(x) = (P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x), \ldots, P_m(x))$ vara den så kallade Sturmkedjan till P och $\sigma(x)$ antalet teckenväxlingar i $\mathbf{s}(x)$.

Då gäller

Sats 10.11 (Sturms sats)**.** *Antag att $a < b$, P är reellt polynom med enkla nollställen och $P(a)P(b) \neq 0$. Då är $\sigma(a) - \sigma(b)$ antalet nollställen till P i intervallet (a, b).*

Anmärkning 10.12. Om P har multipla nollställen så kommer P_m vara ett polynom av grad $P_m \geq 1$. Om vi låter $\tilde{P} = \frac{P}{P_m}$ så har $\tilde{P}$ samma nollställen som P och alla nollställen är enkla. Så om vi använder Sturms sats på $\tilde{P}$ får vi reda på antalet nollställen till $\tilde{P}$, och därmed till P, utan hänsyn till multipliciteten.

Bevis. Låt $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$ vara alla nollställen till något av polynomen $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}, (P_m)$ i (a, b) och sätt $a_0 = a$ och $a_{p+1} = b$. Det är klart att $\sigma(x)$ är konstant på alla intervall (a_i, a_{i+1}).

Så låt oss studera $\sigma(x)$ nära ett nollställe a_i. Antag först att $P_0(a_i) \neq 0$. Så $P_k(a_i) = 0$ för något (eller några) k, $1 \leq k < m$. Betrakta teckenväxlingarna hos P_{k-1}, P_k, P_{k+1} nära a_i. Vi observerar först att $P_{k\pm1}(a_i)$ båda är skilda från noll. Annars får vi successivt $P_{k+1}(a_i), \ldots, P_{m-1}(a_i), P_m(a_i)$ vilket motsäger att P_m är en nollskild konstant. Vi ser också från $P_{k-1} = Q_k P_k - P_{k+1}$ att $P_{k-1}(a_i)$ och $P_{k+1}(a_i)$ har olika tecken. Så $P_{k-1}(a_i), P_k(a_i), P_{k+1}(a_i)$ har tecknen $+, 0, -$ eller $-, 0, +$, dvs. en teckenväxling. För x tillräckligt nära a_i ändras inte tecknen på $P_{k-1}(x), P_{k+1}(x)$ och oavsett tecknet på $P_k(x)$ kommer $P_{k-1}(x), P_k(x), P_{k+1}(x)$ också att ha en teckenväxling. Antalet teckenväxlingar ändras alltså inte nära a_i.

Så enda möjligheten till en ändring av $\sigma(x)$ är i en punkt a_i med $P_0(a_i) = 0$. Så betrakta $P_0 = P$ och $P_1 = P'$ i en omgivning av a_i. Låt $x_- < a_i < x_+$ där $x_\pm$ ligger nära a_i.

Eftersom P har enkla nollställen är $P'(a_i) \neq 0$. Antag att $P'(a_i) > 0$ (fallet $P'(a_i) < 0$ är analogt). Då är $P(x)$ växande nära a_i och alltså $P(x_-) < 0$ och $P(x_+) > 0$. Vi har alltså att tecknen för $P(x_-), P'(x_-)$ är $-, +$, dvs. en teckenväxling. För $P(x_+), P'(x_+)$ är de $+, +$ så vi har ingen teckenväxling. Alltså minskar antalet teckenväxlingar med ett precis då vi passerar ett nollställe till P och satsen följer. $\square$

10.5 Exempel

Exempel 10.13. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Om $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$ så gäller $A\mathbf{e}_1 = (1,-2,1)$, $A^2\mathbf{e}_1 = (-2,-5,4)$ och $A^3\mathbf{e}_1 = (-8,-2,7)$. Detta ger $A^3\mathbf{e}_1 = 9\mathbf{e}_1 - 9A\mathbf{e}_1 + 4A^2\mathbf{e}_1$ så $m_{T,\mathbf{e}_1}(z) = z^3 - 4z^2 + 9z - 9$. Etersom vi vet att $m_{T,\mathbf{e}_1}$ delar m_T och att m_T är högst av tredje graden så gäller $m_T = m_{T,\mathbf{e}_1}$. Euklides algoritm på polynomen $p_0 = m_T$ och $p_1 = m'_T$ ger (med datorhjälp)

$$\begin{array}{rcll} p_0(z) & = & (\frac{1}{3}x - \frac{4}{9})p_1(z) - p_2(z) & \text{där } p_2(z) = 5 - \frac{22}{9}z \\ p_1(z) & = & (\frac{27}{22}z - \frac{369}{484})p_2(z) - p_3(z) & \text{där } p_3 = -\frac{2511}{484}\,. \end{array}$$

Så $\mathrm{SGD}(m_T, m'_T) = \mathrm{SGD}(p_0, p_1) = 1$ och alltså har m_T bara enkla nollställen. Så A är diagonaliserbar som en operator på $\mathbb{C}^n$.

För att avgöra om A är diagonaliserbar över $\mathbb{R}$ använder vi Sturms sats. Om x är tillräckligt litet (tillräckligt nära $-\infty$) så har Sturmkedjan $p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ tecknen $-,+,+,-$ och om x är tillräckligt stort (tillräckligt nära $+\infty$) $+,+,+,-$. Så antalet teckenväxlingar minskar från två till ett och enligt Sturms sats har bara m_T ett reellt nollställe. Så två nollställen är komplexa och A kan inte diagonaliseras över $\mathbb{R}$.

Att m_T bara har ett reellt nollställe kan förstås visas på andra sätt. T.ex. ger kvadratkomplettering att $m'_T(x) > 0$ och alltså är $m_T(x)$ är strängt växande.

Exempel 10.14. Låt

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Om $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ är standardbasen på $\mathbb{C}^3$ så gäller

$$J\mathbf{e}_1 = 2(1,0,0) = 2\mathbf{e}_1, \text{ så } J\mathbf{e}_1 = 2\mathbf{e}_1 \text{ och } m_{J,\mathbf{e}_1}(z) = z - 2\,,$$

$$\begin{gathered} J\mathbf{e}_2 = (1,2,0) \text{ och } J^2\mathbf{e}_2 = (4,4,0) \text{ så} \\ J^2\mathbf{e}_2 = 4J\mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_2 \text{ och } m_{J,\mathbf{e}_2}(z) = z^2 - 4z + 8 = (z-2)^2\,, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} J\mathbf{e}_3 = (0,1,2), J^2\mathbf{e}_3 = (1,4,4) \text{ och } J^3\mathbf{e}_3 = (6,12,8) \text{ så} \\ J^3\mathbf{e}_3 = 6J^2\mathbf{e}_3 - 12J\mathbf{e}_3 + 8\mathbf{e}_3 \text{ och} \\ m_{J,\mathbf{e}_3}(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 8 = (z-2)^3\,. \end{gathered}$$

Så $m_J(z) = m_{J,\mathbf{e}_3}(z) = (z-2)^3$. Alltså har m_J multipla nollställen och kan inte diagonaliseras över varken $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.

Anmärkning 10.15. Att $m_J = m_{J,\mathbf{e}_3}$ följer direkt från att $m_{J,\mathbf{e}_3}$ är ett tredjegradspolynom så beräkningen av $m_{J,\mathbf{e}_1}$ och $m_{J,\mathbf{e}_2}$ är onödig.

Anmärkning 10.16. J är ett Jordanblock så vi visste redan (eller hur?) att J inte kan diagonaliseras.

Kapitel 11

Komplexifiering av vektorrum

På grund av algebrans fundamentalsats ger de komplexa talen en en möjlighet att bättre förstå resultat om reella polynom, t.ex. att varje reellt polynom kan skrivas som en produkt av första- och andragradspolynom, Sats 3.4. På liknande sätt kan vi använda komplexa vektorrum för att få information om linjära avbildningar på reella vektorrum.

Ett exempel på detta är beviset av den reella spektralsatsen. Genom att välja en bas kunde vi anta att vektorrummet var $\mathbb{R}^n$ och att avbildningen gavs av en reell matris A. Men den definierar också genom matrismultiplikation en avbildning på $\mathbb{C}^n$. Genom att studera denna komplexlinjära avbildning lyckades vi bevisa den reella spektralsatsen.

Det finns ett mer invariant sätt att göra denna utvidgning, den så kallade komplexiferingen av vektorrumet. Till ett godtyckligt reellt vektorrum $V_\mathbb{R}$ skall vi definiera ett komplext vektorrum $V_\mathbb{C}$ som innehåller $V_\mathbb{R}$. Om $V_\mathbb{R}$ är ett reellt skalärproduktsrum kan skalärprodukten utvidgas till en skalärprodukt på $V_\mathbb{C}$, och en linjär avbildning $T_\mathbb{R} : V_\mathbb{R} \mapsto V_\mathbb{R}$ har en utvidgning till en linjär avbildning $T_\mathbb{C} : V_\mathbb{C} \mapsto V_\mathbb{C}$.

Definition 11.1. *Komplexifieringen $V_\mathbb{C}$ av det reella vektorrummet $V_\mathbb{R}$ består av alla par $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$ där $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är element i $V_\mathbb{R}$. Vektoroperationerna definieras genom*

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = (\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2) + (\mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_1) + i\,(\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_2)$$

och

$$\lambda\mathbf{v} = (\lambda_1 + i\lambda_2)\,(\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2) = (\lambda_1\mathbf{v}_1 - \lambda_2\mathbf{v}_2) + i\,(\lambda_1\mathbf{v}_2 + \lambda_2\mathbf{v}_1)$$

Två vektorer $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2$ är lika om $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ och $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2$. Vektorerna $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ kallas för real- respektive imaginärdelarna till $\mathbf{v}$ och betecknas $\mathbf{v}_1 = \mathrm{Re}\,\mathbf{v}$ och $\mathbf{v}_2 = \mathrm{Im}\,\mathbf{v}$. Med konjugatet till $\mathbf{v}$ menas vektorn $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_1 - i\mathbf{v}_2$. $V_{\mathbb{R}}$ kan uppfattas som den delmängd till $V_{\mathbb{C}}$ som uppfyller $\mathrm{Im}\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Vi skriver $V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{R}} \oplus iV_{\mathbb{R}}$.

Övning 11.1. Bevisa att komplexifieringen $V_{\mathbb{C}}$ är ett komplext vektorrum.

Om $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ är en bas för $V_{\mathbb{R}}$ så är den också en bas för $V_{\mathbb{C}}$. Vektorn $\mathbf{u}+i\mathbf{v}$ får koordinaterna $(u_1+iv_1, u_2+iv_2, \ldots, u_n+iv_n)$ om $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ och $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Om $T_{\mathbb{R}}$ är en linjär avbildning mellan två reella vektorrum V och U så kan $T_{\mathbb{R}}$ utvidgas till en komplexlinjär avbildning mellan deras komplexifieringar, $T_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to U_{\mathbb{C}}$, genom $T_{\mathbb{C}}(\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2) = T_{\mathbb{R}}\mathbf{v}_1 + iT_{\mathbb{R}}\mathbf{v}_2$.

Slutligen skall vi utvidga en skalärprodukt på det reella vektorrummet $V_{\mathbb{R}}$ till en skalärprodukt på $V_{\mathbb{C}}$. För en komplex skalärprodukt gäller

$$\langle \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1 \rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_2 \rangle + i\left(\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \rangle\right) ,$$

så vi sätter

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \mathbf{v}_1+i\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1+i\mathbf{u}_2 \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathbb{R}} + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathbb{R}} + i\left(\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathbb{R}} - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathbb{R}}\right) .$$

Övning 11.2. Visa att $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}}$ är en komplex skalärprodukt på $V_{\mathbb{C}}$.

Övning 11.3. Vad är den komplexlinjära utvidgningen av $\mathbb{R}^n$.

Övning 11.4. Låt $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^n$ betraktat som ett vektorrum över $\mathbb{R}$. (Dvs. $\lambda\mathbf{v}$ är bara definierat då $\lambda \in \mathbb{R}$, vi glömmer bort att λ kan vara komplext.) Vad är komplexifieringen av $V_{\mathbb{R}}$?

Vi ger nu ett alternativt bevis för den reella spektralsatsen och börjar med följande resultat.

Lemma 11.2. *Låt $T_{\mathbb{R}}$ vara en linjär avbidning på ett reellt vektorrum. Om den komplexlinjära utvidgningen $T_{\mathbb{C}}$ har ett reellt egenvärde λ så är λ ett egenvärde till $T_{\mathbb{R}}$.*

Bevis. Om $T_{\mathbb{C}}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ där $\lambda \in \mathbb{R}$, och $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$ så gäller $T_{\mathbb{R}}\mathbf{v}_1 + iT_{\mathbb{R}}\mathbf{v} = T_{\mathbb{C}}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}_1 + i\lambda\mathbf{v}_2$. Detta ger $T_{\mathbb{R}}\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1$ och $T_{\mathbb{R}}\mathbf{v}_2 = \lambda\mathbf{v}_2$. Eftersom $\mathbf{v} \neq 0$ kan inte både $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ vara nollvektorn så minst en av $\mathrm{Re}\,\mathbf{v}$ eller $\mathrm{Im}\,\mathbf{v}$ är en reell egenvektor till $T_{\mathbb{R}}$ med egenvärdet λ. $\square$

Bevis av den reella spektralsatsen. Förutsättningen i satsen betyder att $T_{\mathbb{R}}$ är en linjär avbildning på ett reellt vektorrum $V = V_{\mathbb{R}}$ med en skalärprodukt $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}}$, och att $T_{\mathbb{R}}$ uppfyller $\langle T_{\mathbb{R}}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \mathbf{u}, T_{\mathbb{R}}\mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}}$ för alla $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

Vi komplexifierar nu situationen till en skalärprodukt $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}}$ på $V_{\mathbb{C}}$. Det är lätt att se att då gäller $\langle T_{\mathbb{C}}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \mathbf{u}, T_{\mathbb{C}}\mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}}$ för alla $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $V_{\mathbb{C}}$.

Övning 11.5. Visa det.

Härnäst visar vi att alla egenvärdena är reella. Låt r vara talet $r = \langle T_{\mathbb{C}}\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}$ där $\mathbf{v} \in V_{\mathbb{C}}$. Då gäller

$$\bar{r} = \overline{\langle T_{\mathbb{C}}\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}} = \langle \mathbf{v}, T_{\mathbb{C}}\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}} = \langle T_{\mathbb{C}}\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}} = r$$

så r är ett reellt tal.

Men om $T_{\mathbb{C}}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ så gäller $r = \langle T_{\mathbb{C}}\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}} = \langle \lambda\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}} = \lambda\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}$. Men $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}} > 0$ och alltså är λ ett reellt tal. □

Enligt diskussionen ovan följer det att det finns en (reell) egenvektor i V.

För att bevisa spektralsatsen skall vi visa att $T = T_{\mathbb{R}}$ har n parvis ortogonala egenvektorer där n är dimensionen på V. Vi gör detta med induktion.

Om $n = 1$ är följer det direkt från existensen av en reell egenvektor.

Låt nu $n > 1$. Vi vet att T har en reell egenvektor $\mathbf{v}_1$ med det reella egenvärdet λ_1. Välj vektorer $\tilde{\mathbf{v}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_3, \ldots, \tilde{\mathbf{v}}_n$ så att $\mathbf{v}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_3, \ldots, \tilde{\mathbf{v}}_n$ bildar en ortonormerad bas. Så $\tilde{V} = \mathrm{span}(\tilde{\mathbf{v}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_3, \ldots, \tilde{\mathbf{v}}_n)$ är det ortogonala komplementet till $\mathbf{v}_1$. Låt $\tilde{T}$ vara restriktionen av T till $\tilde{V}$.

Då är $\tilde{T}$ är en linjär avbildning på $\tilde{V}$. För att se att $\tilde{T}$ avbildar $\tilde{V}$ in i $\tilde{V}$ observerar vi att om $\tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{V}$ så gäller

$$\langle \mathbf{v}_1, T\tilde{\mathbf{v}}\rangle = \langle T\mathbf{v}_1, \tilde{\mathbf{v}}\rangle = \langle \lambda_{\mathbf{1}}\mathbf{v}_{\mathbf{1}}, \tilde{\mathbf{v}}\rangle = \lambda_1\langle \mathbf{v}_{\mathbf{1}}, \tilde{\mathbf{v}}\rangle = 0$$

Så $T\tilde{\mathbf{v}} \perp \mathbf{v}_1$, dvs. $T\tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{V}$. Dessutom är $\tilde{T}$ självadjungerad eftersom restriktionen av en självadjungerad linjär avbildning är självadjungerad.

Så $\tilde{T}$ är en självadjungerad linjär avbildning på ett $n-1$-dimensionellt vektorrum. Enligt induktionsantagandet har $\tilde{T}$ $n-1$ ortogonala egenvektorer $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n$. Så $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n$ är n ortogonala egenvektorer till T och satsen är bevisad.

□