Linjär algebra II 2018-08-23

1. —

2. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ i standard basen S ges av

$$[T]_S = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ -7 & 3 & 19 \\ -4 & 4 & 15 \end{bmatrix}$$

Egenvärden: $\det(T - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 23\lambda^2 - 120\lambda = 0$

$$\Leftrightarrow -\lambda(\lambda - 8)(\lambda - 15) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 8 \\ \lambda_3 = 15 \end{cases}$$ Enligt Korollarium 3.17 T är diagonaliserbar

Egenvektorer:

1) $T\vec{X} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & 3 & 0 \\ -7 & 3 & 19 & 0 \\ -4 & 4 & 15 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 48 & 87 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots$

$$\Rightarrow \vec{x} = t \begin{bmatrix} 31/16 \\ -29/16 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 31 \\ -29 \\ 16 \end{bmatrix}$$

2) $(T - 8I)\vec{x} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 7 & 3 & 0 \\ -7 & -5 & 19 & 0 \\ -4 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & 16 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots$

$$\Rightarrow \vec{x} = t \begin{bmatrix} 37/16 \\ 9/16 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 37 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

3) $(T-15I)\vec{x}=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -10 & 7 & 3 \\ -7 & -12 & 19 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -10 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \vec{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}, \quad \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. i slutet

4.

(a) —

(b) $V = \mathbb{R}_2[t]$

Applicerar Gram-Schmidts algoritm på $\{1, t, t^2\}$:

$\vec{u}_1 = 1, \quad \|\vec{u}_1\|^2 = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle = 1, \quad \vec{e}_1 = 1$

$\vec{u}_2 = t - \langle t, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 = t, \quad \|\vec{u}_2\|^2 = \langle t, t \rangle = 1, \quad \vec{e}_2 = t$

$\vec{u}_3 = t^2 - \langle t^2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 - \langle t^2, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 = t^2, \quad \|\vec{u}_3\|^2 = \langle t^2, t^2 \rangle = 4, \quad \vec{e}_3 = \frac{t^2}{2}$

En ON-bas är $\{1, t, \frac{t^2}{2}\}$

5. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Egenvärden: $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda+1)^2(\lambda-8) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = -1 \\ \lambda_3 = 8 \end{cases}$

Egenvektorer:

1) $(A+I)\vec{x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$$\Rightarrow \vec{x} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t,s \in \mathbb{R}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gram-Schmidts algoritm:

$\vec{u}_1 = \vec{v}_1, \quad \|\vec{u}_1\|^2 = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle = 2, \quad \vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 2 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \quad \|\vec{u}_2\| = \frac{3\sqrt{2}}{2},$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2) $(A-8I)\vec{x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots$

$$\Rightarrow \vec{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

OBS!
$\vec{e}_3$ är ortogonal mot $\vec{e}_1$ och $\vec{e}_2$. Det finns ett fel om det inte stämmer

I bas $E: \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ matris till A är diagonal

$$[A]_E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}_E$$

6.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = [A]_S$$

Egenvärden: $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda - 2)^2(\lambda - 1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = 2 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

Egenvektorer:

1) $(A - 2I)\vec{x} = 0$ ... räknar ...

$$E_2 = \text{span}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{e}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{e}_2} \right\}$$

2) $(A - I)\vec{x} = 0$ .... räknar ...

$$E_1 = \text{span}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{e}_3} \right\}$$

I bas $E: \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ matris till A är diagonal

$$[A]_E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_E$$

och vi har $[e^A]_E = e^{[A]_E} = \begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}_E$

Då gäller $[e^A]_S = [I]_{SE}\,[e^A]_E\,[I]_{ES}$, där

$$[I]_{SE} = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{SE},$$

$$[I]_{ES} = [I]_{SE}^{-1} = \ldots \text{räknar} \ldots = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och}$$

$$[e^A]_S = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \ldots$$

$$\ldots = \begin{bmatrix} 3e-2e^2 & -3e+3e^2 & e-e^2 \\ 3e-3e^2 & -3e+4e^2 & e-e^2 \\ 3e-3e^2 & -3e+3e^2 & e \end{bmatrix}_S$$

3.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = 0 \iff$$

$$\iff -\lambda(1-\lambda)^2(2-\lambda) + (1-\lambda) = 0$$

$$\iff (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$$

$$\iff (1-\lambda)^3 = 0$$

$\lambda = 1$ är det enda egenvärdet (med algebraisk multiplicitet 4)

Ekvationen $(A-I)\vec{x} = 0$ har lösningar

$$\vec{x} = t \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{e}_1} + s \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{e}_2} + h \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{e}_3}, \quad t, s, h \in \mathbb{R}.$$

Därför $E_1 = \text{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ och $\lambda = 1$ har geometrisk multiplicitet 3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Jordan normalform J för A innehåller 3 Jordanblock som motsvarar $\lambda = 1$.

Det finns bara ett möjligt alternativ för J:

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$