Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys

2005-03-29

1. (a) Se föreläsningsanteckningarna.
   (b) Se föreläsningsanteckningarna.
   (c) Ett programpaket, anpassat till moderna datorer, för linjära ekvationssystem, minstakvadratproblem och egenvärdesproblem.
   (d) Maximalt polynomiellt gradtal. Svårt att återanvända funktionsvärden vid adaptivitet.
   (e) `1/0` blir `Inf` och arctan bör då bli ungefär $\pi/2$ varför sinus borde bli ett. `1e200^2` blir `Inf` och `1/Inf` blir noll. `log(0)` borde bli `-Inf`.
   (f) Vi får utskiftning då $(1/k^4)/(\pi^4/(90 \cdot 10^4)) \approx \epsilon_{mach}$, så $k \approx 10^5$. I Matlab får man 110220.
   (g) Låt $\mathbf{A}\mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \neq \mathbf{0}$. En reell symmetrisk matris har reella egenvärden och egenvektorer. Multiplicera med $\mathbf{x}_k^T$, ger $\mathbf{x}_k^T \mathbf{A}\mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k$ så att $\lambda_k > 0$ ty $\mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k > 0$ och $\mathbf{x}_k^T \mathbf{A}\mathbf{x}_k > 0$ ($\mathbf{A}$ är ju positivt definit och $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{0}$). Om $\mu \geq \lambda_k$ får något k gäller att $\mathbf{x}_k^T(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})\mathbf{x}_k = (\lambda_k - \mu)\mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k \leq 0$.
   (h) $||\mathbf{D}|| = \max_k |d_k|$ för alla tre normerna. I tvånormens fall vet vi att $||\mathbf{D}||_2$ är roten ur största egenvärdet till $\mathbf{D}^T\mathbf{D}$. Denna matris är ju diagonal med egenvärdena d_k^2 på diagonalen.
   Inversen existerar och det gäller att $\mathbf{D}^{-1} = \text{diag}(1/d_1, \ldots, 1/d_n)$ varför $||\mathbf{D}^{-1}|| = \max_k |1/d_k| = 1/\min_k |d_k|$. Konditionstalet är $||\mathbf{D}||\,||\mathbf{D}^{-1}||$.

2. $\mathbf{X}$ definieras av tre element. Låt $\alpha = x_{1,1}$, $\beta = x_{1,2} = x_{2,1}$ och $\gamma = x_{2,2}$. Vi har då:

$$\mathbf{X}^3 + 2\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha^3 + 2\alpha & (\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2 + 2)\beta \\ 0 & \gamma^3 + 2\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 + 2\alpha = 1 \\ (\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2 + 2)\beta = 1 \\ \gamma^3 + 2\gamma = 1 \end{cases}$$

Så Newtons metod kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{k+1} \\ \beta_{k+1} \\ \gamma_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3\alpha_k^2 + 2 & 0 & 0 \\ (2\alpha_k + \gamma_k)\beta_k & \alpha_k^2 + \alpha_k\gamma_k + \gamma_k^2 + 2 & (\alpha_k + 2\gamma_k)\beta_k \\ 0 & 0 & 3\gamma_k^2 + 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_k^3 + 2\alpha_k - 1 \\ (\alpha_k^2 + \alpha_k\gamma_k + \gamma_k^2 + 2)\beta_k - 1 \\ \gamma_k^3 + 2\gamma_k - 1 \end{bmatrix}$$

3. Inför $y_1 = u$, $y_2 = y_1' = u'$, $y_3 = v$ samt $y_4 = y_3' = v'$. Systemet övergår i:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_1 y_3/\sqrt{y_2 + y_4} \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = t + (y_1 + y_3)y_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(2) = -1 \\ y_2(2) = 3 \\ y_3(2) = 2 \\ y_4(2) = 1 \end{cases}$$

Så

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \\ y_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ y_3^{(0)} \\ y_4^{(0)} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} y_2^{(0)} \\ y_1^{(0)} y_3^{(0)} / \sqrt{y_2^{(0)} + y_4^{(0)}} \\ y_4^{(0)} \\ t_0 + (y_1^{(0)} + y_3^{(0)}) y_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 0.1 \cdot 3 \\ 3 + 0.1\,(-1 \cdot 2/\sqrt{3+1}) \\ 2 + 0.1 \cdot 1 \\ 1 + 0.1(2 + (-1+2)\,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7 \\ 2.9 \\ 2.1 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

4. Del (a). Vi får två förstagradspolynom, ett på $[0, 1]$ och ett på $[1, 2]$. Så:

$$s(t) = \begin{cases} t\xi, & t \le 1 \\ 2\xi - 4 + (4 - \xi)t, & 1 \le t \end{cases}$$

Den enda punkt där där derivata kan saknas är för $t = 1$. Vänsterderivatan är då ξ och högerderivatan är $4 - \xi$. Derivatorna är lika när $\xi = 2$ och $s(t) = 2t$ är då en linjär funktion.

(b) Det är falskt. Låt f vare en (av oändligt många) positiva funktioner som satisfierar $f(-1) = 1$, $f(3/4) = 1/8$ och $f(1) = 1$. Interpolationspolynomet är då $p(t) = 2t^2 - 1$ som inte är positivt i intervallet $[-1, 1]$ ty $p(0) = -1$ t.ex.

5. Man kan tänka sig flera alternativ. Det som skall räknas ut, ξ, är en skalär. Man kan multiplicera in $\mathbf{b}$ i parentesen och räkna ut vektorn $\mathbf{a}(\mathbf{a}^T\mathbf{b}) + 2\mathbf{A}\mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Ett annat alternativ är att multiplicera in både $\mathbf{a}^T$ och $\mathbf{b}$ i parentesen: $\xi = (\mathbf{a}^T\mathbf{a})\mathbf{a}^T\mathbf{b} + 2\mathbf{a}^T\mathbf{A}\mathbf{b} - \mathbf{a}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Det första alternativet ger följande program ($\mathbf{t}$ är en temporär vektor):

$\tau = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$	n +, *. τ är en temporär skalär (kunde använt ξ)
$\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{b}$	n^2 +, *
beräkna $\mathbf{A}$s LU-faktorisering, spara i $\mathbf{A}$	$n^3/6$ +, *
lös $\mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{b} = \mathbf{b}$	n^2 +, *. Skriver över $\mathbf{b}$ med lösningen.
$\mathbf{t} = \tau\ \mathbf{a} + 2\mathbf{t} - \mathbf{b}$	$2n$ *, $3n$ +
$\xi = \mathbf{a}^T\mathbf{t}$	n +, *

Vi behöver en extra vektor, $\mathbf{t}$. Faktoriseringskostnaden dominerar med $n^3/6$ +,*.

6. Problemet kan skrivas: $\min_{\mathbf{x}} ||\mathbf{S}\mathbf{x} - \mathbf{b}||_2$ med $\mathbf{b} = \mathbf{P}\mathbf{c} - \mathbf{Q}\mathbf{e}_1 + \mathbf{g}$ (där $\mathbf{e}_1$ som vanligt är första kolonnen i $\mathbf{I}$). Man behöver inte räkna mycket om man inte vill. Vi ser att $\mathbf{P}\mathbf{c} - \mathbf{Q}\mathbf{e}_1 \in \mathcal{R}(\mathbf{S})$ men $\mathbf{g} \perp \mathcal{R}(\mathbf{S})$ så $\mathbf{x}^T = [-\mathbf{e}_1^T, \mathbf{c}^T]$ och residualvektorn är $\mathbf{g}$ som har normen $||\mathbf{g}||_2$. $\mathbf{S}$ är en ortogonal matris och har därmed $\mathbf{S}$ full kolonnrang. Lösning är alltså entydig.

Ett alternativ är att räkna mer mekaniskt. Vi utnyttjar att $\mathbf{Q}^T\mathbf{P} = \mathbf{0}$, vilket följer av $\mathbf{S}\mathbf{S}^T = \mathbf{I}$, ty:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{P}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} & \mathbf{Q}^T\mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T\mathbf{Q} & \mathbf{P}^T\mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Man kan nu använda normalekvationerna:

$$(\mathbf{S}^T\mathbf{S})\mathbf{x} = \mathbf{S}^T(\mathbf{P}\mathbf{c} - \mathbf{q}_1 + \mathbf{g}) \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{P}^T \end{bmatrix} (\mathbf{P}\mathbf{c} - \mathbf{q}_1 + \mathbf{g}) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T(\mathbf{P}\mathbf{c} - \mathbf{q}_1 + \mathbf{g}) \\ \mathbf{P}^T(\mathbf{P}\mathbf{c} - \mathbf{q}_1 + \mathbf{g}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Q}^T\mathbf{q}_1 = \mathbf{e}_1$ eftersom $\mathbf{q}_1 = \mathbf{Q}\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$.